مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن

كلية التربية الخمس

جامعة المرقب

العدد الرابع

يناير 2014م

هيئة التحرير

رئيس هيئة التحرير

د/ صالح حسين الأخضر

أعضاء هيئة التحرير

1 – د . ميلود عمار النفر
2 – د . عبد الله محمد الجعكي
3 – أ . سالم حسين المدهون
4 – أ . سالم مفتاح الأشهب

استشارات فنية وتصميم الغلاف . أ/ حسين ميلاد أبو شعالة

بحوث العدد

- أثر اختلاف مطالع القمر في بدء الصيام والإفطار .
- جماليات البنية الإيقاعية في القرآن الكريم "دراسة في الجزء الأخير من سورة مريم" .
- الفكر الوسواسي والسلوك القهري" المفهوم – الأنواع – أساليب العلاج" .
- Financial Disclosure in the annual reports of Libyan Banks from Users' perspectives .
- Investigating grammatical mistakes in liyan learners' written discourse in al mergeb university .
- Teaching pre- service teachers critical reading through the newspapers .
- Using blogs in English language teaching and teacher education programs .

الافتتاحية

مع إطلالة العدد الرابع من مجلتكم الناشئة "مجلة التربوي" نجدد العهد مع قراء المجلة الكرام بأن تكون دوما ملتزمة بنشر الجديد والمفيد والهادف من الأبحاث العلمية التربوية إيمانا منها بأن كلية التربية عبر منبرها المتمثل في مجلتها "التربوي" تعتبر قلعة ومنارة يشع نورها في ربوع بلادنا الحبيبة .

إن أعضاء هيئة التحرير بالمجلة ، وأسرة تدريس كلية التربية الخمس تتوجه بالشكر الجزيل لكل من أسهم ويسهم في مساعدة المجلة في تحقيق الهدف المنشود، وبخاصة الأساتذة الفضلاء الذين استقطعوا من وقتهم الثمين لقراءة البحوث فأفادوا الباحثين والمجلة بملحوظاتهم القيمة، التي تثري البحث، وترفع من قيمة المجلة في الأوساط العلمية .

ونحن إذ نسير في هذا الدرب يحدونا الأمل بأن نكون من الذين أسهموا في خلق الإنسان المؤمن والمربي الفاضل المتمسك بقيم الدين والأخلاق الكريمة .

هيئة التحرير

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.

د. عادل بشير بادي
أستاذ مساعد - قسم الرياضيات بكلية العلوم \ جامعة مصراتة
email: adbabadi@yahoo.com

ملخص

هذا البحث هو دراسة للدوال الأسية واللوغارتمية تعتمد على خواص الأعداد والدوال ومبادئ التحليل الرياضي مثل نهايات المتتاليات ونهايات الدوال. كذلك سنقوم بإثبات خواصها بما في ذلك مشتقاتها بدون استخدام الأساليب الرياضية المتقدمة كالتكامل المحدد والمتسلسلات اللانهائية. المناقشة والعرض باستخدام هذه المفاهيم الأولية ليست مطروحة في مصادر التحليل الحقيقي والتفاضل والتكامل المتقدم المعروفة.

مقدمة

للدوال الأسية واللوغارتمية أهمية بالغة في دراسة الرياضيات وفي التطبيقات. ففي الرياضيات تعتبر هذه الدوال من أهم أمثلة الدوال غير الجبرية وهي تلعب دوراً أساسياً في دراسة أغلب فروع الرياضيات كالمعادلات التفاضلية بسبب الخواص التي تتميز بها. أما في الناحية التطبيقية فإننا نسوق مثال سلوك الدوال الأسية الذي يمثل ظاهرة النمو الأسي التي تظهر في دراسة تكاثر المخلوقات الأولية في الأحياء وكذلك التحلل الأسي الذي يظهر في الاضمحلال

الإشعاعي في الكيمياء. وهناك العديد من التطبيقات الأخرى التي لا تحصى ولا تعد لهذه الدوال في كل مجالات العلوم التطبيقية، وفي الكثير من العلوم الإنسانية

تاريخياً، لم يكن الهدف من وراء وضع اللوغارتمات والأسس هو التطبيقات. لقد كان المقصود منها هو إيجاد طرق جديدة لتسهيل إجراء العمليات الحسابية التي يصعب إجراؤها بشكل يدوي كالضرب والقسمة وخاصة عندما يكون عدد الخانات الصحيحة والعشرية كبير. لقد طور الرياضي الاسكتلندي جون نابير (John Napier) اللوغارتمات لتسهيل إجراء العمليات الحسابية بتحويل عملية الضرب إلى جمع ، وشرح طريقته في كتاب نشره سنة 1614. ولقد بقيت طريقة نابير هي الطريقة الأساسية المعتمدة في إجراء الحسابات منذ ذلك الوقت إلى أن ظهرت الآلات الحاسبة اليدوية في الربع الأخير من القرن العشرين.

على الرغم من أن تعريف الدالة الأسية عند القيم الكسرية واضح ولا صعوبة في دراستها على مجموعة الأعداد القياسية ، ولكن ذلك لا يكفي للوصول إلى إثبات خواص هذه الدوال والدوال العكسية لها وهي الدوال اللوغارتمية. والسبب في ذلك أن دراسة خواص هذه الدوال ومشتقاتها على مجموعة الأعداد الحقيقية تحتاج إلى أدوات تحليلية تختلف عن الأساليب الجبرية المألوفة لدى غالبية الطلاب وهذه الأدوات التحليلية لا تدرس عادة للمستويات الأولية.

في غالبية المصادر يُعرَّف اللوغارتم الطبيعي للعدد الموجب x على أنه العدد $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

ويتم اشتقاق خواص اللوغارتم الطبيعي من هذه العلاقة باستثناء الخاصية $\ln x^r = r \ln x$ حيث r عدد حقيقي اختياري لأن العدد x^r ليس معرفاً والذي يتم تعريفه بعد ذلك باستخدام الدالة الأسية $\exp$ التي بدورها تعرف على أنها الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية. وبناءً على ذلك يتم تعريف x^r بالعلاقة التالية:

$x^r = \exp(r \ln x)$.

وباستخدام الدالتين $\ln, \exp$ يمكن تعريف الدالة الأسية والدالة اللوغارتمية لأي أساس موجب ودراسة خواصها.

هذا الأسلوب في تعريف هذه الدوال متبع في أغلب مصادر التحليل الحقيقي والتفاضل والتكامل المتقدم [انظر المراجع 1، 2، 5، 6، 7، 12]. هذه الطريقة تعطي تطبيقا متميزا للتكامل المحدود ، ومثال ممتاز للأسلوب الموضوعي في عرض التعريفات والمبرهنات. ولكن هذا الأمر يجعل دراسة الدوال اللوغارتمية والأسية عملية متقدمة ومتوقفة على استخدام أداة تحليلية متطورة إذا ما قارنَّاها بالمبادئ الأساسية للأعداد الحقيقية والدوال، الأداة المقصودة هنا هي التكامل المحدد. هناك أساليب أخرى لتعريف الدوال الأسية واللوغارتمية، بعض المصادر تستخدم متسلسلات القوى لتعريف الدوال الأسية واللوغارتمية، [انظر : 8].

هناك استراتيجيات متباينة لتدريس الدوال الأسية واللوغارتمية في سياق مقررات التفاضل والتكامل لطلاب المراحل الدنيا، البعض يستخدم التكامل المحدد لتعريف اللوغارتم ومنه يستنتج بقية الخواص [انظر المصادر 3، 9، 10]. هذا

الخيار له ثمنه ؛ لأن عرض هذه المواضيع سيتأخر إلى ما بعد دراسة التكامل المحدد ، كما أنه سيتم التخلي عن فكرة أن الأسس واللوغارتمات هي الامتداد الطبيعي للقوى الصحيحة للأعداد ولجذور الأعداد الموجبة.

يعرض الكثير الموضوع انطلاقاً من القوى الصحيحة والجذور ويعرفون الدالة الأسية على أنها استكمال للأسس المقتصرة فقط على الأعداد القياسية وبعد ذلك تعرف الدالة اللوغارتمية على أنها الدالة العكسية للدالة الأسية كما في المصدرين [4، 11]. وبالرغم من أن هذه المقاربة لدراسة الأسس واللوغارتمات متبعة في هذين المصدرين والكثير غيرها إلا أننا لم نجد في مصادر التحليل الحقيقي والتفاضل والتكامل المتقدم المتوفرة لدينا اشتقاقاً رياضياً دقيقاً لها لا يعتمد على التكامل المحدد أو المتسلسلات اللانهائية. ولهذا وضعنا هذه الورقة لتوضيح هذه التفاصيل ولتقديم البراهين اللازمة التي لا تعتمد على أي أداة سوى المبادئ الأساسية للأعداد والدوال.

من خلال عرض الموضوع والتعريفات والبراهين سنقوم بوضع بعض الأفكار بين يدي الباحثين والمدرسين والمهتمين بالرياضيات التي تلقي الضوء على الخواص الأساسية التي تتميز بها الأسس واللوغارتمات، وعلى بعض مبادئ وأساليب التحليل الرياضي التي تطبق في دراسة الرياضيات بشكل عام. بواسطة هذه الخواص ستتكون فكرة لدى القارئ حول هذا النوع من الدوال وكيفية عرض هذه المواضيع المتعلقة بها وتدريسها للطلاب المتبدئين ولغير المتخصصين.

كذلك فإن المناقشة المعروضة في هذه البحث توضح أهمية طرق البرهنة التي تدرس عادة في مبادئ التحليل الحقيقي والتفاضل والتكامل المتقدم.

في هذه الورقة سنبدأ بتقديم التفاصيل التحليلية لتعريف الأسس على أنها الامتداد للقوى الصحيحة والجذور ، ثم نعرف الدالة الأسية لأي أساس باستخدام نهايات المتتاليات. بعد ذلك نقدم برهاناً رياضياً دقيقاً لوجود النهاية

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}$$

باستخدام الخواص الأساسية للأعداد والدوال والنهايات. وسنستخدم هذه النهاية لحساب مشتقة الدالة الأسية وسنستخدمها كذلك لتعريف اللوغارتم الطبيعي واشتقاق كل خصائصه. ومنها نستنتج علاقة ذلك بدالة اللوغارتم الطبيعي والدالة الأسية واللوغارتمية لأساس اختياري.

الأسس والدوال الأسية

ليكن a أي عدد حقيقي. لأي عدد صحيح موجب n نعرِّف العدد التالي

$$a^n = \overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n\text{ مرة}}.$$

العدد a^n يسمى بالعدد a مرفوعاً إلى القوة n أو إلى الأس n والعدد n يسمى بالأس. إذا كان $a\neq 0$، فإنه يمكننا تعريف $a^0=1$. وإذا كان $n<0, a\neq 0$، فإنه يمكننا تعريف العدد a^n بالعلاقة

$$a^n = (a^{-n})^{-1} = (\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{|n|\text{ مرة}})^{-1} = \overbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}^{|n|\text{ مرة}}.$$

المقدار $|n|$ يرمز للقيمة المطلقة للعدد n. يمكن بسهولة إقناع الطالب المبتدئ وغير المتخصصين بأن الأس الصحيح للعدد الموجب يحقق الخواص التالية:

خواص القوى الصحيحة للأعداد الموجبة

ليكن a, b عددين موجبين و n, m عددين صحيحين.

1) $a^n = b^n$ إذا وفقط إذا كان $a = b$.

2) $a^{n+m} = a^n a^m$.

3) $a^{nm} = (a^n)^m$.

4) $a^n b^n = (ab)^n$.

5) ليكن $a > 1$. إذا كان $n > m$، فإن $a^n > a^m$.

6) ليكن $0 < a < 1$. إذا كان $n > m$، فإن $0 < a^n < a^m$.

7) ليكن $a < b$. إذا كان $n > 0$، فإن $a^n < b^n$. وإذا كان $n < 0$، فإن $a^n > b^n$.

يمكن إثبات هذه الخواص رياضياً باستخدام مبادئ الجبر وأساليب البرهان الأساسية كالاستقراء.

الجذور

ليكن $m > 1$. الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^m$ هي دالة مستمرة. ليكن $0 < a < 1$. لاحظ أن $f(a) = a^m < a < 1 = f(1)$. من مبرهنة القيمة

المتوسطة المعروفة يوجد عدد حقيقي b بحيث أن $a < b < 1$ و $.b^m = f(b) = a$

كذلك إذا كان $1 < a$، فإن $f(1) = 1 < a < a^m = f(a)$. وهنا أيضاً سنستخدم مبرهنة القيمة المتوسطة لإثبات وجود عدد b بحيث أن $1 < b < a$ و $.b^m = f(b) = a$

العدد الموجب b والذي يحقق الشرط $b^m = a$ هو عدد وحيد ويسمى الجذر من الرتبة m للعدد a ويرمز له بالرمز $a^{\frac{1}{m}}$ أو بالرمز $\sqrt[m]{a}$. لقد أثبتنا هنا وجود الجذور من كل الرتب للأعداد الموجبة وهذا يعد تطبيقاً جيداً لمبرهنة القيمة المتوسطة.

من المعلوم أن العدد الموجب له جذر سالب من الرتب الزوجية بالإضافة إلى الجذر الوحيد الموجب وكذلك الأعداد السالبة لها جذور سالبة من الرتب الفردية ولكننا في سياق دراسة الدوال الأسية واللوغارتمات لا نهتم بالجذور السالبة وسندرس فقط خواص الجذور الموجبة للأعداد الموجبة. الجذور تتمتع بالخواص التالية:

خواص الجذور

ليكن a, b عددين موجبين و m, n عددين صحيحين موجبين.

1) $b = a^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow b^m = a$.

2) $a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3) $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$.

4) $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

5) إذا كان $a > 1$ و n عدد صحيح، فإن $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

6) إذا كان $0 < a < 1$ و n عدد صحيح، فإن $0 < a^{\frac{1}{n}} < 1$.

ليكن a عدد حقيقي موجب. الآن لأي عدد قياسي q يمكننا تعريف العدد a^q بالعلاقة

$$a^q = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

حيث $q = \frac{n}{m}$ و $m > 0$. إذا كان $q = \frac{n'}{m'}$، فإنه يمكننا باستخدام خواص الأس لبيان أن $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m'}}\right)^{n'}$. وبهذا فإن تعريف العدد a^q ليس فيه غموض أو خلط لأن قيمته وحيدة ولا تتوقف على صورة كسرية معينة وهذا مثال للمفهوم الرياضي الذي يسمى بالتعريف الجيد. يمكن باستخدام خواص القوى الصحيحة وخواص الجذور أن نثبت الخواص التالية:

خواص القوى القياسية للأعداد الموجبة

ليكن a, b عددين موجبين و p, q عددين قياسيين.

1) $a^{p+q} = a^p a^q$.

2) $a^{pq} = (a^p)^q$.

3) $a^q b^q = (ab)^q$.

4) ليكن $a > 1$. إذا كان $q > p$، فإن $a^q > a^p$.

5) ليكن $0 < a < 1$. إذا كان $q > p$، فإن $a^q < a^p$.

6) ليكن $a < b$. إذا كان $q > 0$، فإن $a^q < b^q$. وإذا كان $q < 0$، فإن $a^q > b^q$.

نلاحظ أن تعريف العدد a^q،حيث q عدد قياسي، واشتقاق خواصه يعتمد فقط على الخواص الجبرية للأعداد. ولكن خواص الأعداد الجبرية لوحدها لا تكفي لتعريف العدد a^x عندما يكون x عدد حقيقي اختياري. نحتاج إلى التمهيد التالي لوضع تعريف قيمة العدد الموجب المرفوع لأس حقيقي اختياري.

تمهيد 1: إذا كان a عدد موجب

1) إذا كان $a > 1$ و m عدد صحيح موجب، فإن $\frac{a-1}{ma} < a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}$.

2) لأي عدد موجب a يوجد ثابت K_a بحيث أن $|a^q - 1| \leq K_a|q|$ لأي عدد قياسي q بحيث أن $|q| < 1$.

البرهان: (1) لاحظ أن $\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^{\frac{k}{m}}\right)\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right) = 1 - {}^{m}\left(a^{\frac{1}{m}}\right) = a - 1$.

كذلك نلاحظ أن $m < \sum_{k=0}^{m-1} a^{\frac{k}{m}} < ma$ لأن $1 < a^{\frac{k}{m}} < a$ لكل $k = 0,1,\dots,m-1$.

بضرب هذه المتباينة في $a^{\frac{1}{m}} - 1$ نجد أن $m\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right) < a-1 < ma\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)$. ومن هذه المتباينة نصل إلى المطلوب.

(2) نفرض أولاً أن $a > 1, q = \frac{n}{m} > 0, n < m$. كما في برهان (1) نستخدم المتطابقة التالية $\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{m}}\right)\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right) = 1 - {}^{n}\left(a^{\frac{1}{m}}\right) = a^{\frac{n}{m}} - 1$. إذا كان $0 \le k < n$، فإنه يكون لدينا $a^{\frac{k}{m}} < a^{\frac{n}{m}}$ ومنه نجد أن $\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{m}} < na^{\frac{n}{m}}$. بضرب المتباينة الأخيرة في $a^{\frac{1}{m}} - 1$ نجد أن $a^{\frac{n}{m}} - 1 < na^{\frac{n}{m}}\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)$. ومن المتباينة في الفقرة (1) نصل إلى المتباينة $a^{\frac{n}{m}} - 1 < \frac{n}{m}(a-1)a^{\frac{n}{m}}$. وبذلك فإن

$$(1)a^q - 1 < q(a-1)a^q < q(a-1)a$$

إذا كان $a > 1$ و q عدد قياسي بحيث أن $0 < q < 1$.

إذا فرضنا الآن أن العدد القياسي q يحقق الشرط $0 > q > -1$، فإننا نجد أن $0 < -q < 1$ ومن المتباينة السابقة نجد أن $a^{-q} - 1 < -q(a-1)a^{-q}$.

بالضرب في a^q نجد أن

$1 - a^q < -q(a-1)$ (2).

باستخدام المتباينتين $(1),(2)$ نجد أن

$$(3)|\square^q - 1| < |q|(a-1)a$$

حيث $a > 1$ و $|q| < 1$.

الآن إذا كان $0 < q < 1, a < 1$، فإن $a^{-1} > 1$ ومن المتباينة (1) نجد أن

$$a^{-q} - 1 < q(a^{-1} - 1)a^{-q} \Leftarrow 1 - a^q < q(a^{-1} - 1).$$

وبشكل مشابه عندما $-1 < q < 0, a < 1$ نجد أن

$$a^q - 1 < -q(a^{-1} - 1)a^q < -q(a^{-1} - 1)a^{-1}$$

باستخدام المتباينتين الأخيرتين نجد أن

$$(3)|a^q - 1| < |q|(a^{-1} - 1)a^{-1}$$

عندما $a < 1$ و $|q| < 1$.

لأي عدد موجب a نقوم بوضع $K_a = \max\{(a-1)a, (a^{-1} - 1)a^{-1}\}$ فنجد أن $|a^q - 1| \le K_a|q|$ لأي عدد قياسي $|q| < 1$.

ليكن $a > 0$. لأي عدد حقيقي x نختار متتالية متزايدة من الأعداد القياسية $(q_n)_{n\ge1}$ بحيث أن $q_n \to x$. لاحظ أن المتتالية $(a^{q_n})_{n\ge1}$ محدودة ومطردة (متزايدة إذا كان $a > 1$ ومتناقصة إذا كان $0 < a < 1$). من الخواص الأساسية للمتتاليات نجد أن $(a^{q_n})_{n\ge1}$ متقاربة إلى عدد ما وليكن L. لأي متتالية $(p_n)_{n\ge1}$ متقاربة إلى x، تكون المتتالية $(a^{p_n})_{n\ge1}$ متقاربة إلى نفس

العدد L. لبيان ذلك نلاحظ أن $\lim_n \left(q_n - p_n\right) = 0$. من المتباينة في الفقرة (2) من التمهيد 1 نجد أن

$$\left|a^{q_n - p_n} - 1\right| \leq K_a \left|q_n - p_n\right|$$

لأي عدد n كبير بشكلٍ كافٍ ليكون $\left|q_n - p_n\right| < 1$. وبذلك فإن $\lim_n a^{q_n - p_n} = 1$ ومنه $\lim_n a^{p_n} = \lim_n a^{q_n} = L$ وهذا يضمن أن هذه النهاية هي نفسها لأي متتالية أعداد قياسية $\left(p_n\right)_{n\geq 1}$ متقاربة إلى x. وبذلك فإننا نعرف العدد a^x حيث $a > 0$ و x عدد حقيقي اختياري كما يلي

$$a^x = L = \lim_n a^{q_n}$$

حيث $\left(q_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية أعداد قياسية متقاربة إلى x. يمكننا استخدام النهايات لبيان أن الأسس الاختيارية تحقق القوانين المذكورة أعلاه بعد إعادة صياغة هذه القوانين باستبدال كلمة "قياسي" بكلمة "حقيقي".

خواص القوى الحقيقية للأعداد الموجبة

ليكن a, b عددين موجبين و x, y عددين حقيقيين.

1) $a^{x+y} = a^x a^y$.

2) $a^{xy} = (a^x)^y$.

3) $a^x b^x = (ab)^x$.

4) ليكن $a > 1$. إذا كان $x > y$، فإن $a^x > a^y$.

5) ليكن $0 < a < 1$. إذا كان $x > y$، فإن $a^x < a^y$.

6) ليكن $a < b$. إذا كان $x > 0$، فإن $a^x < b^x$. وإذا كان $x < 0$، فإن $a^x > b^x$.

7) إذا كان $a > 1$، فإن $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

8) إذا كان $0 < a < 1$، فإن $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

الآن يمكننا تعريف الدوال الأسية العامة. ليكن $a > 0$. الدالة الأسية العامة هي الدالة $E_a: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ والتي تعرف بالعلاقة $E_a(x) = a^x$.

مبرهنة 2: الدالة الأسية العامة E_a مستمرة وإذا كان $a \neq 1$، فإنها تكون تقابلية.

البرهان: الاستمرارية واضحة إذا كان $a = 1$ لأن الدالة ستكون ثابتة. نفرض أن $a \neq 1$. في هذه الحالة E_a تكون دالة مطردة (متزايدة إذا كان $a > 1$ ومتناقصة إذا كان $0 < a < 1$). بما أن $E_{\square}$ مطردة، فإن النهايتين من الجانبين عند الصفر $\lim_{x\to 0^\pm} E_a(x)$ موجودتان.

إذا عرفنا العددين L_+, L_- بالعلاقة $L_\pm = \lim_{x\to 0^\pm} E_a(x)$، فإننا نجد من خواص النهايات أن العلاقتين التاليتين متحققتين

$$L_{+} = \lim_{n} E_a\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1 = E_a(0)\text{،}$$

$$L_{-} = \lim_{n} E_a\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n} a^{-\frac{1}{n}} = a^0 = 1 = E_a(0).$$

وبذلك فإن الدالة E_a مستمرة عند العدد 0. الآن يمكننا باستخدام خواص الأسس المذكورة أعلاه بيان أنها مستمرة عند أي عدد حقيقي. من خواص الأسس كذلك نلاحظ أن الدالة E_a أحادية. ومن مبرهنة القيمة المتوسطة نجد أنها فوقية. وبذلك فإنها دالة تقابلية.

من هذه المبرهنة نجد أنه إذا كان $a \neq 1$، فإن E_a لها دالة عكسية $E_a^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. الدالة E_a^{-1} تسمى بالدالة اللوغارتمية للأساس a ويرمز لها بالرمز $\log_a = E_a^{-1}$. لاحظ أنه إذا كان x, y عددين حقيقيين و $x > 0$، فإن

$$y = \log_a x \iff x = E_a(y) = a^y.$$

2) اللوغارتمات ومشتقة الدوال الأسية

ليكن a عدد موجب. نعرف الدالة

$$l_a(t) = \frac{a^t - 1}{t}, \qquad l_a: R \setminus \{0\} \to R.$$

تمهيد 3: نفرض أن $a \neq 1$. إذا كان m_1, m_2 عددين صحيحين غير صفريين بحيث أن $m_1 < m_2$، فإن

$$l_a(m_1) < l_a(m_2).$$

البرهان: ليكن $m > 0$. بإجراء بعض الحسابات الجبرية نجد أن

$$l_a(m+1)-l_a(m)=\frac{ma^m(a-1)-(a^m-1)}{m(m+1)}$$

$$=\frac{(a-1)\sum_{j=0}^{m-1}a^m-(a-1)\sum_{j=0}^{m-1}a^j}{m(m+1)}$$

$$=\frac{(a-1)\sum_{j=0}^{m-1}a^j(a^{m-j}-1)}{m(m+1)}$$

لاحظ أننا استخدمنا العلاقتين $a^m-1=(a-1)\sum_{j=0}^{m-1}a^j$ و $ma^m=\sum_{j=0}^{m-1}a^m$ في المساواة الثانية.

$$h_a(m+1)-h_a(m)=\frac{(a-1)\sum_{j=0}^{m-1}a^j\left((a-1)\sum_{i=0}^{m-j-1}a^i\right)}{m(m+1)}$$

$$=\frac{(a-1)^2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-j-1}a^{i+j}}{m(m+1)}$$

في هذه المرة استخدمنا العلاقة $a^{m-j}-1=(a-1)\sum_{i=0}^{m-j-1}a^i$.

واضح أن المقدار $\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-j-1}a^{i+j}$ موجب وبذلك فإن $\ell_a(m+1)>\ell_a(m)$. بالاستقراء نجد أن $\ell_a(m_1)<\ell_a(m_2)$ إذا كان $0<m_1<m_2$.

الآن إذا كان $m_1<m_2<0$، فإن $\ell_{a^{-1}}(-m_2)<\ell_{a^{-1}}(-m_1)$ ومنه نجد أن العلاقة $\ell_a(m_1)<\ell_a(m_2)$ متحققة عندما $m_1<m_2<0$. يمكن

بسهولة بيان أن المتباينة $-(a^{-1}-1) < a-1$ متحققة إذا كان a عدد موجب بحيث أن $a \neq 1$، وبذلك فإن $\ell_a(-1) < \ell_a(1)$.

ومن ذلك إذا كان $m_1 < 0 < m_2$، فإن $\ell_a(m_1) \leq \ell_a(-1) < \ell_a(1) \leq \ell_a(m_2)$. وبذلك ينتهي إثبات المبرهنة.

تمهيد 4: الدالة ℓ_a متزايدة.

البرهان: إذا كان q_1, q_2 عددين قياسيين غير صفريين بحيث أن $q_1 < q_2$، فإنه يمكننا كتابة هذين العددين على الصورة $q_1 = \frac{m_1}{n}, q_2 = \frac{m_2}{n}$ حيث $n > 0$ و $m_1 < m_2$. من التمهيد 3 نجد أن

$$l_a(q_1) = nl_{a^{1/n}}(m_1) < nl_{a^{1/n}}(m_2) = l_a(q_2).$$

لاحظ أن الدالة ℓ_a مستمرة على نطاقها $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ليكن x_1, x_2 عددين حقيقيين غير صفريين و $x_1 < x_2$. إذا كان $\varepsilon > 0$، فإنه يمكننا اختيار عددين قياسيين غير صفريين q_1, q_2 بحيث أن $q_1 < q_2$ و $\left|\ell_a(q_1) \quad \ell_a(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|\ell_a(q_2) \quad \ell_a(x_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ وهذا يضمن أن

$$-\varepsilon < -\varepsilon + l_a(q_2) - l_a(q_1) < l_a(x_2) - l_a(x_1).$$

وبما أن ε اختياري فإن $\ell_a(x_2) \geq \ell_a(x_1)$.

مبرهنة 5: النهاية $\lim_{t\to 0} \ell_a(t)$ موجودة لأي عدد $a > 0$.

البرهان: حسب التمهيد السابق فإن الدالة ℓ_a متزايدة، وبذلك فإن النهايتين من الجانبين عند الصفر $\lim_{t\to 0^\pm} \ell_a(t)$ موجودتان. لاحظ أن $\ell_a(t) = a^t \ell_a(-t)$ ومن ذلك نجد أن

$\lim_{t\to 0^-} l_a(t) = \lim_{t\to 0^-} a^t l_a(-t) = \lim_{x\to 0^+} a^{-t} l_a(t) = \lim_{t\to 0^+} l_a(t)$.

وبذلك فإن النهاية $\lim_{t\to 0} \ell_a(t)$ موجودة لأي عدد $a > 0$.

الآن نعرف الدالة $\ln: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$\ln(x) = \lim_{t\to 0} l_x(t) = \lim_{t\to 0} \frac{x^t - 1}{t}.$$

لاحظ أن هذه الدالة جيدة التعريف لأن النهاية $\lim_{t\to 0} \frac{x^t - 1}{t}$ موجودة لأي $x > 0$. لاحظ كذلك أن هذه النهاية لها استخدام مباشر وهو حساب مشتقة الدالة الأسية كما توضح المبرهنة التالية.

مبرهنة 6: الدالة الأسية العامة $E_a: \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ E_a(x) = a^x$ قابلة للاشتقاق لأي $a > 0$ ومشتقتها هي

$$E'_a(x) = (a^x)' = a^x \ln a.$$

البرهان: نحسب النهاية $\lim_{t\to 0} \frac{E_a(x+t) - E_a(x)}{t}$ لأي $x \in \mathbb{R}$ كما يلي

$$\lim_{t\to 0} \frac{E_a(x+t) - E_a(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^{x+t} - a^x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^x a^t - a^x}{h}$$
$$= a^x \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^x \lim_{t\to 0} l_a(t) = a^x \ln a$$

وبذلك فإن E_a قابلة للاشتقاق ومشتقتها هي $E'_a(x) = a^x \ln a$.

من المؤكد أن غالبية القراء يعرفون أن الرمز ln مخصص لدالة اللوغارتم الطبيعي، ولكنــنا هنا لن نستخدم أي خاصية معروفة مسبقاً للوغارتم

الطبيعي وسنستخدم فقط التعريفات التي ذكرناها في هذه الورقة والنتائج التي أثبتناها لبرهنة كل الخصائص الأساسية للدالة اللوغارتمية.

مبرهنة 7: لتكن x, y, r أعداد حقيقية و $x > 0, y > 0$.

1) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.

2) $\ln x^r = r \ln x$.

3) $x^{-1}(x-1) \leq \ln x \leq x - 1$.

4) $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

5) **الدالة اللوغارتمية قابلة للاشتقاق ومشتقتها هي** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6) **الدالة $\ln$ متزايدة على الفترة $(0, +\infty)$ وكذلك فإن**

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

البرهان: (1) لاحظ أن

$$\ln(x \cdot y) = \lim_{t \to 0} \frac{(xy)^t - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x^t y^t - y^t + y^t - 1}{t}$$

$$- \left(\lim_{t \to 0} y^t\right)\left(\lim_{t \to 0} \frac{x^t - 1}{t}\right) + \lim_{t \to 0} \frac{y^t - 1}{t}$$

$$= 1 \cdot \ln x + \ln y = \ln x + \ln y$$

(2) إذا كان $r = 0$، فمن الواضح أن الخاصية متحققة. وإذا كان $r \neq 0$، فإن

$$\ln x^r = \lim_{t \to 0} \frac{(x^r)^t - 1}{t} = r \lim_{t \to 0} \frac{x^{rt} - 1}{rt} = r \lim_{u \to 0} \frac{x^u - 1}{u} = r \ln x.$$

(3) نفرض أولاً أن $x > 1$. من المتباينة في الفقرة (1) من التمهيد 1 نجد أن

$$x^{-1}(x-1) < \frac{x^{m^{-1}} - 1}{m^{-1}} < x - 1$$

حيث m عدد صحيح موجب. من تعريف $\ln x$ ومن خواص النهايات نجد أن

$$\ln x = \lim_{m\to+\infty} l_x(m^{-1}) = \lim_{m\to+\infty} \frac{x^{m^{-1}} - 1}{m^{-1}}.$$

وبذلك نكون قد بينّا أن

$$x^{-1}(x-1) \le \ln x \le x - 1$$

عندما يكون $x > 1$.

إذا كان $x < 1$، فإن $x^{-1} > 1$ ومنه نجد أن

$$1 - x \le -\ln x \le x^{-1}(1-x) \Leftarrow x(x^{-1}-1) \le \ln x^{-1} \le x^{-1} - 1$$

بالضرب في -1 نجد أن $x^{-1}(x-1) \le \ln x \le x - 1$. وبهذا نكون قد برهنّا الفقرة (3).

(4) من الفقرة (3) نجد أن $\frac{1}{x+1} \le \frac{\ln(x+1)}{x} \le 1$. هاتان المتباينتان تضمنان أن $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

(5) إذا كان x أي عدد موجب، فإن

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(x+t) - \ln x}{t} = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u} = \frac{1}{x}.$$

هذا يضمن أن $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. لاحظ أننا استخدمنا النهاية في الفقرة (4).
(6) بما أن مشتقة الدالة $\ln$ موجبة، فإنها متزايدة. من الفقرة (4) نجد أن $\ln 2 > \frac{1}{2}$. لاحظ أن $\ln 2^n > \frac{n}{2}$ وبذلك فإن $\ln$ دالة غير محدودة. بما أنها متزايدة، فإن $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. وكذلك فإن

$$.\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{y\to+\infty} \ln y^{-1} = -\lim_{y\to+\infty} \ln y = -\infty$$

لأي عدد موجب $x \neq 1$ نعرف العدد $e_x = x^{1/\ln x}$. ليكن x, y أي عددين موجبين و$x \neq 1, y \neq 1$. لاحظ أن $\ln e_x = 1 = \ln e_y$. وبما أن الدالة $\ln$ أحادية، فإن $e_x = e_y$. وبذلك فإن القيمة $x^{1/\ln x}$ ثابتة مهما يكن $x > 0, x \neq 1$. سنرمز لهذه القيمة الثابتة بالرمز e. هذا العدد يسمى بأساس اللوغارتمات الطبيعية.

نعرف الدالة الأسية $\exp: \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ \exp(x) = e^x$. إذا كان $x > 0, x \neq 1$، فإن

$$.\exp(\ln x) = e^{\ln x} = \left(x^{1/\ln x}\right)^{\ln x} = x$$

واضح أن $\exp(\ln 1) = 1$. وإذا كان x أي عدد حقيقي، فإن

$$.\ln(\exp(x)) = \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

وبذلك فإن الدالة اللوغارتمية $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية $\exp$. أي أن $\ln = \log_e$ وهي الدالة اللوغارتمية للأساس e.

باستخدام الفقرة (4) من المبرهنة 7 نجد أن

$$\lim_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_n \frac{\ln(1+n^{-1})}{n^{-1}}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1.$$

وباستخدام خواص الدوال الأسية واللوغارتمية نحصل على

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_n \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\exp\left(\lim_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

ومن هذه المساواة نصل إلى هذه النهاية المعروفة

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp(1)=e.$$

يمكن التعبير عن الدالة الأسية العامة $E_a:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ E_a(x)=a^x$ للأساس الاختياري $a>0$ باستخدام الدالتين $\ln, \exp$ كما يلي

$$E_a(x)=\exp\big(\ln(E_a(x))\big)=\exp(\ln a^x)=\exp(x\ln a).$$

ومن ذلك فإن $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. ومن هذه العلاقات يمكن للقارئ استنتاج كل الخواص الأساسية للوغارتمات.

خواص اللوغارتمات

لتكن a,b,x,y أعداد موجبة و $a\neq 1, b\neq 1$.

1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

2) $\log_a x^r=r\log_a x$ لأي عدد r.

3) $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}$.

4) إذا كان $a>1$، فإن

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty.$$

5) إذا كان $a < 1$، فإن

6) $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty$.

7) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

8) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

ليكن r عدد حقيقي. نعرف الدالة $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ حيث $f(x) = x^r$. إذا كان r عدد قياسي، فإنه من الممكن دراسة هذه الدالة وحساب مشتقتها باستخدام الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية. المشتقة في هذه الحالة هي $f'(x) = rx^{r-1}$. لكن ذلك سيكون صعباً جداً إذا كان r عدداً غير قياسي. استخدام الدوال الأسية واللوغارتمية يسهل عملية حساب المشتقة في هذه الحالة.

ليكن r عدد غير حقيقي. لاحظ أن $f(x) = e^{r\ln x}$ وبذلك فإن

$f'(x) = \frac{r}{x}e^{r\ln x} = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}$.

1) Apostol, T. M., Calculus, Volume I, 2^{nd} ed., John Wiley & Sons, Inc., 1967.
2) Bloch, E. D.,The Real Numbers and Real Analysis, Springer Science+Business Media, LLC, 2011.
3) Hass, J, Weir, M. D. and Thomas G. B. Jr., Thomas'Calculus 12^{nd} ed., Pearson Education, Inc., 2010.
4) Hass, J, Weir, M. D. and Thomas G. B. Jr., University Calculus: Early Transcendentals 2^{nd} ed., Pearson Education, Inc., 2012.
5) Olmsted, J. M. H., Advanced Calculus, Appleton Century Crofts Inc., 1961
6) Protter, M. H., Basic Elements of Real Analysis, Springer- Verlag New York, Inc. 1998.
7) Pugh, C. C., Real Mathematical Mnalysis, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.

8) Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, 3^{rd} ed., McGraw- Hill, Inc., 1976.

9) Smith R. T. and Minton R. B., Calculus 4^{th} ed., McGraw- Hill, 2008.

10) Stewart, J., Calculus, 7^{ed} ed., Brooks/Cole, 2012.

11) Stewart, J., Single Variable Calculus; Early Transcendentals, 7^{ed} ed., Brooks/Cole, 2012.

12) Stoll, M., Introduction to Real Analysis, 2^{nd} ed., Addison Wesley Longman, Inc., 2001.

الفهرس

الفهرس

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث المكتوب باللغة العربية بملخص باللغة الإنجليزية ، والبحث المكتوب بلغة أجنبية مرخصا باللغة العربية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.

2- The research articles or manuscripts should be original, and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal, or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.

3- The research article written in Arabic should be accompanied by a summary written in English.

And the research article written in English should also be accompanied by a summary written in Arabic.

4- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.

5- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.

6- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention

1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.

2- The accepted research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.

3- The published articles represent only the authors viewpoints.