ISSN : 2706-9087

جامعة المرقب
كلية الآداب والعلوم قصر الأخيار
ELMERGIB UNIVERSITY
FACULTY OF ART & SCIENCE KASR KHIAR - LIBYA

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

مجلة دورية نصف سنوية محكمة

في هذا العدد،،،

العدد
8
ISSUE

ديسمبر 2019
DESEMBER 2019

kshj@elmergib.edu.ly http://khsj.elmergib.edu.ly +21892516762

المشرف العام

أ.النوري سليمان القماطي

هيئة التحرير

د. سالم محمد المعلول رئيساً

د. إمحمد عطية يحيى مدير التحرير

أ. علي محمد نجاح سكرتير التحرير

اللجنة الاستشارية

أ.د. علي الحوات
أ.د. أحمد ظافر محسن
أ.د. عبدالمجيد خليفة النجار
أ.د. العربي علي القماطي
د.عبدالرحمن محمد إرحومة
د.الصادق المبروك الصادق
د.أبوراوي محمد الجرنازي
د.حميدة ميلاد أبورونية

المراجعة اللغوية

د. أبو عجيلة رمضان عويلي
أ. يوسف دخيل علي
أ. عصام علي عواج
أ. عبدالرؤوف ميلاد عبدالجواد

الإخراج والإشراف الفني

أ.أحمد عياد المنتصري

©

لا يسمح بإعادة إصدار محتويات المجلة أو نقلها أو نسخها بأي شكل من الأشكال دون موافقة رئيس التحرير

إن كافة البحوث تعبر عن وجهة نظر أصحابها، و لا تعبر بالضرورة عن رأي المجلة أو الكلية

جميع الحقوق محفوظة

قواعد النشر

حرصاً من هيئة التحرير على استخدام الأسلوب العلمي في كتابة البحوث والدراسات المراد نشرها، ينبغي اتباع القواعد التالية :

الغلاف ينبغي أن يحتوى على العنوان واسم الباحث (الباحثين) ، والدرجة العلمية وجهة العمل ، والدولة ، والبريد الإلكتروني ، وسنة النشر .

المتن يشتمل على ملخص للبحث (عربي – إنجليزي) بعكس لغة البحث لا يتجاوز ورقة واحدة.

تخضع البحوث المقدمة للنشر للتحكيم العلمي ، ولهيئة التحرير أن تطلب من المؤلف بناء على اقتراح المحكمين بإجراء التعديلات المطلوبة على البحث قبل الموافقة على نشره .

ضوابط ومواصفات البحوث المقدمة للنشر:

1. أن يكون البحث أو الدراسة ضمن الموضوعات التي تختص بها المجلة .
2. ألاّ يكون البحث قد سبق نشره في إحدى المجلات أو مستلا من أطروحة علمية أو يكون الباحث قد تناوله بعنوان آخر في وسيلة نشر أخرى ويوثق ذلك بتعهد خطي بهذا الخصوص .
3. فيما يخص البحوث العربية تكتب هوامش البحث وقائمة المراجع وفق دليل جمعية علم النفس الأمريكية American Psychological Association(APA) الطبعة الخامسة بالنسبة للبحوث العربية وتكون الطباعة على وجه واحد على ورق (A4) بخط (Traditional Arabic) بحجم (14) للنص مع ترك مسافة 1 بين السطور وتكون الهوامش 2.5 سم و مع ترك هامش 3 سم من جهة التجليد ،
4. فيما يخص البحوث باللغة الإنجليزية تكتب وفق نظام (Modern Language Association (MLA ، بحجم خط (12) بخط (Times New Roman) مع ترك مسافة 1 بين السطور مع وجود ملخص باللغة العربية في بداية البحث بحيث لا تزيد صفحات البحث 17 صفحة ي يكون التوثيق داخل المتن (اللقب ، السنة ، الصفحة) .
5. عنوان البحث يجب أن يكون مختصرا قدر الإمكان وأن يعبر عن هدف البحث بوضوح ويتبع المنهجية العلمية من حيث التناول والإحاطة بأسلوب بحثي علمي ، وأن لا تزيد ورقات البحث عن 25 صفحة بما في ذلك صفحات الجداول والصور والرسومات وغيرها .
6. يجب على الباحث التقييد بأصول البحث العلمي وقواعده من حيث أسلوب العرض والمصطلحات وتوثيق المصادر والمراجع في آخر البحث ، وهو المسئول بالكامل عن صحة النقل من المصادر والمراجع المستخدمة ، وهيئة التحرير غير مسئولة عن أي نقل خاطئ "سرقات أدبية وعلمية " قد تحدث في تلك البحوث .
7. البحوث المقدمة للمجلة تخضع للتقييم من قبل متخصصين بشكل يضمن التقييم العلمي، ويتطلب من الباحث مراعاة سلامة بحثه من الأخطاء اللغوية والإملائية .
8. تلتزم المجلة بإشعار الباحث بقبول بحثه إن كان مقبولا للنشر أو قابلا للتعديل بعد التقييم على أن يرسل الباحث إذا قبل بحثه سيرة ذاتية (CV) مختصر قدر الإمكان يتضمن الاسم الثلاثي – والدرجة العلمية – والجامعة والكلية والقسم – وأهم المؤلفات إن وجدت – البريد الالكتروني – والهاتف .

9. البحوث المقدمة للمجلة لا تعاد لأصحابها سواء نشرت أو لم تنشر ، وهي تعبر عن رأي أصحابها فهم المسئولون عنها أدبيا وقانونيا ولا يمثل بالضرورة رأي المجلة .
10. المجلة تنشر كل ما يتعلق بالمجال العلمي والبحثي وما يتعلق بالمؤتمرات والندوات والأنشطة الأكاديمية وملخصات الرسائل العلمية ونقد الكتب على أن لا تزيد عن خمس صفحات مطبوعة
11. إشعار الباحث بقبول بحثه وإرجاعه للتصحيح أو الإضافة أو التعديل على أن يقوم بتزويد المجلة بنسخة من البحث في صورته النهائية على قرص مدمج(CD).
12. تعتبر البحوث قابلة للنشر من حيث صدور خطاب صلاحية النشر وتحال إلى الدور بانتظار الطبع حسب أولوية الدور وزخم الأبحاث المحالة للنشر .
13. يزود الباحث بنسخة من إعداد المجلة التي نشر بها بحثه .

هيئة تحرير المجلة

افتتاحية العدد

بسم الله الرحمن الرحيم

يسر هيئة تحرير مجله العلوم الإنسانية وا لاجتماعية والعلمية أن تقدم الى القراء الكرام العدد الثامن بعد ان تم تعديل اسمها الى مجله العلوم الإنسانية والتطبيقية بدلا من العنوان السابق بناء على ملاحظات القراء الكرام.

يأتي هذا العدد حافلا بمجموعة من البحوث والدراسات المتنوعة في مجالس العلوم الإنسانية والتطبيقية آملين أن يجد القارئ الكريم في هذا العدد مبتغاه.

وفي إطار تطور المجله بعد ان نالت المجله الاعتماد الدولي والاعتماد العربي فإننا نعيد تذكير السادة البحاث والمهتمين بالبحث العلمي بسياسة المجله التي تعمل على تقديم أفضل البحوث والدراسات وفق منهجية علمية وتقديم مادة مفيدة من أجل تجويد وتحسين الإنتاج العلمي بحيث تكون الدراسات والبحوث تتناول موضوعات شتى في مختلف ميادين المعرفة سواء في مجال العلوم الإنسانية أو التطبيقية.

كما نذكر السادة البحاث فإن المجله تفتح أبوابها لاستقبال المزيد من الإنتاج العلمي الرصين سواء على المستوي المحلي أو العربي أو الدولي، وفي الوقت نفسه نعتذر للسادة البحاث الذين قدموا بحوثهم ولم يتم استكمال تقييمها نظرا للظروف التي تمر بها البلاد فإننا سنشير الصالح منها في الاعداد القادمة بعون الله تعالى.

والله ولي التوفيق

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

A Comparison Between Elzaki and Aboodh Transforms to Solve Systems of Linear Volterra Integral Equations

Jamal Hassn Frjani[1] , Ahmed Husayn Ikreea[2] and Mohammed Ebraheem Attaweel[3]

1,2Mathematics Dept. ,Arts & Sciences Faculty/Mssalata ,Elmergib University , Libya
3Mathematics Dept. , Arts & Sciences Faculty/Gassr Khyar ,Elmergib University , Libya
3E-mail: meattaweel@elmergib.edu.ly

الملخص

في هذه الورقة العلمية ، أجريت مقارنة بين تحويل الزاكي و تحويل عبود لحل بعض منظومات معادلات فولتيرا التكاملية الخطية.

Abstract

In this paper , the Elzaki transform is compared with Aboodh transform to solve some systems of linear Volterra integral equations.

Keywords: Elzaki transform;Aboodh transform ; systems of Linear Volterra integral equations.

Introduction

Integral transforms play an important role in many fields of science. In literature, integral transforms are widely used in mathematical physics, optics, engineering mathematics and, few others. Among these transforms which were extensively used and applied on theory and applications are: Laplace transform , Fourier , Mellin, Hankel , Mahgoub , Elzaki , Aboodh and Sumudu.

The Laplace transform has been effectively used to solve linear and non-linear ordinary and partial differential equations and integral equations [15] and is used extensively in electrical engineering. The Laplace transform reduces a linear differential equation to an algebraic equation, which can be solved by rules of algebra. The original differential equation can then be solved by applying the inverse Laplace transform.
Tarig M. Elzaki and Salih M. Elzaki in 2011, showed the modified of Sumudu transform [6-13] or Elzaki transform was applied to partial differential equations, ordinary differential equations, system of ordinary and partial differential equations and integral equations. Elzaki transform is a powerful tool for solving some differential equations which cannot be solved by Sumudu transform.

Aboodh Transform [1-5,14] was introduced by Khalid Aboodh in 2013, to facilitate the process of solving ordinary and partial differential equations in the time domain. This transformation has deeper connection with the Laplace and Elzaki Transform.

The main objective in this article is to introduce a comparative study to solve some systems of linear Volterra integral equations by using Elzaki transform and Aboodh transform.

Definitions and Standard Results

1. Elzaki Transform

The Elzaki transform is a newly introduced integral transform similar to Laplace transform and other integral transform that are defined in the time domain $t \geq 0$, and for functions in the set B defined by:

$$B = \left\{ f \,|\, \exists M, k_1, k_2 > 0 \text{ such that} \left|f(t)\right| < M\, e^{\frac{|t|}{k_j}}, if\ t \in (-1)^j \times [0,\infty) \right\} \tag{1}$$

For a given function in the set B , the constant M must be finite number ; k_1, k_2 may be finite or infinite.

Then, the Elzaki transform denoted by the operator $E[f(t)] = T(u)$ for function of exponential order and belonging to set B is defined by one of the following equivalent integral forms:

$$T(u) = E[f(t)] = u\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt, u \in (k_1, k_2)$$
$$T(u) = E[f(t)] = u^2\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt, k_1, k_2 > 0 \tag{2}$$

1.1 Some Properties of Elzaki Transform

1.1.1 Linearity Property of Elzaki Transform

` If $E\left[f_1(t)\right] = T_1(u)$ and $E\left[f_2(t)\right] = T_2(u)$ then

$$E\left[a\ f_1(t) + b\ f_2(t)\right] = a\,E\left[f_1(t)\right] + b\,E\left[f_2(t)\right] = a\,T_1(u) + b\ T_2(u) \tag{3}$$

Where a, b arbitrary constants

1.1.2 Convolution of Two Functions

Convolution of two functions $f(t)$, $h(t)$ is denoted by $f(t) * h(t)$ and it is defined by

$$f(t) * h(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t f(x)h(t-x)dx = \int_0^t h(x)f(t-x)dx \tag{4}$$

If $E[f(t)] = T(u)$, $E[h(t)] = W(u)$ then

$$E[f(t) * h(t)] = \frac{1}{u}E[f(t)]E[h(t)] = \frac{1}{u}T(u)W(u) \tag{5}$$

1.1.3 Elzaki Transforms of the derivatives

If $E[f(t)] = T(u)$ then

1. $E[f'(t)] = \frac{1}{u}T(u) - u\,f(0)$ **(6)**

2. $$E[f''(t)] = \frac{1}{u^2} T(u) - f(0) - u\, f'(0) \tag{7}$$

3. $$E[f^{(m)}(t)] = u^{-m} T(u) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{2-m+k} f^{(k)}(0) \tag{8}$$

1.1.4 Multiple Shift Property

If $E[f(t)] = T(u)$ then

1. $$E[t\, f(t)] = u^2 \frac{d}{du}[T(u)] - u\,T(u) \tag{9}$$

2. $$E[t^2\, f(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2}[T(u)] \tag{10}$$

3. $$E[t^3 f(t)] = u^6 \frac{d^3}{du^3}[T(u)] + 3u^5 \frac{d^2}{du^2} T(u) \tag{11}$$

4. $$E[t\, f'(t)] = u^2 \frac{d}{du}[\frac{1}{u} T(u) - u\, f(0)] - u[\frac{T(u)}{u} - u\, f(0)]$$
(12)

5. $$E[t^2\, f'(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{1}{u} T(u) - u\, f(0)\right] \tag{13}$$

6. $E[t\, f''(t)] =$
$$u^2 \frac{d}{du}\left[\frac{T(u)}{u^2} - f(0) - u\, f'(0)\right] - u\,[\frac{T(u)}{u^2} - f(0) - u\, f'(0)] \tag{14}$$

7. $$E[t^2\, f''(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{1}{u^2} T(u) - f(0) - u\, f'(0)\right] \tag{15}$$

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

1.2 Elzaki Transform of Some Elementary Function

S.N.	$f(t)$	$E[f(t)]$
1.	1	u^2
2.	t	u^3
3.	$t^n, n \geq 0$	$n! u^{n+2}$
4.	e^{at}	$\frac{u^2}{1-au}$
5.	$t e^{-at}$	$\frac{u^3}{(1+au)^2}$
6.	$\sin at$	$\frac{au^3}{1+a^2u^2}$
7.	$\cos at$	$\frac{u^2}{1+a^2u^2}$
8.	$\sinh at$	$\frac{au^3}{1-a^2u^2}$
9.	$\cosh at$	$\frac{au^2}{1-a^2u^2}$
10.	$J_0(t)$	$\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}$

NB. In the previous table a is a constant

2. Aboodh Transform

Aboodh transform is a new integral transform defined for function of exponential order .Consider functions in the set A , defined by:

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, \left| f(t) \right| < Me^{-vt} \right\}, k_1 \leq v \leq k_2 \qquad (16)$$

For a given function in the set A, M must be a finite number, k_1, k_2 may be finite or infinite. Aboodh transform which is defined by the integral equation

$$A[f(t)] = K(v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-vt}\, dt, t \geq 0, k_1 \leq v \leq k_2 \qquad (17)$$

2.1 Some Properties of Aboodh Transform

2.1.1 Linearity Property of Aboodh Transform

` If $A\left[f_1(t)\right] = K_1(v)$ and $A\left[f_2(t)\right] = K_2(v)$ then

$$A\left[a\, f_1(t) + b\, f_2(t)\right] = a\, A\left[f_1(t)\right] + b\, A\left[f_2(t)\right] = a\, K_1(v) + b\, K_2(v) \qquad (18)$$

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

Where a, b arbitrary constants

2.1.2 Convolution of Two Function

Convolution of two functions $f(t)$, $h(t)$ is denoted by $f(t)*h(t)$ and it is defined by

$$f(t)*h(t)=h(t)*f(t)=\int_0^t f(x)h(t-x)dx=\int_0^t h(x)f(t-x)dx \qquad (19)$$

If $A[f(t)]=K(v)$, $A[h(t)]=L(v)$ then

$$A[f(t)*h(t)]=v\,A[f(t)]\;A[h(t)]=vK(v)\,L(v) \qquad (20)$$

2.1.3 Aboodh Transform of the Derivatives

If $A[f(t)]=T(v)$ then

1. $A[f'(t)]=vK(v)-\dfrac{f(0)}{v}$ (21)
2. $A[f''(t)]=v^2K(v)-f(0)-\dfrac{f'(0)}{v}$ (22)
3. $A[f^{(m)}(t)]=v^mK(v)-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{u^{2-m+k}}$ (23)

2.1.4 Multiple Shift Property

If $A[f(t)]=K(v)$ then

1. $A[t\,f(t)]=-\dfrac{d}{dv}[K(v)]-\dfrac{1}{v}K(v)$

   (24)
2. $A[t\,f'(t)]=-\dfrac{d}{dv}[vK(v)-\dfrac{f(0)}{v}]-\dfrac{1}{v}\left[vK(v)-\dfrac{f(0)}{v}\right]$ (25)
3. $A[t\,f''(t)]=\dfrac{-d}{dv}\left[\dfrac{K(v)}{v^{-2}}-\dfrac{f'(0)}{v}-f(0)\right]-\dfrac{1}{v}\left[\dfrac{K(v)}{v^{-2}}-\dfrac{f'(0)}{v}-f(0)\right]$ (26)
4. $A\left[t^2f'(t)\right]=v\dfrac{d^2K(v)}{dv^2}+2\dfrac{dK(v)}{dv}-2\dfrac{f(0)}{v^3}$ (27)
5. $A\left[t^2f''(t)\right]=v^2\dfrac{d^2K(v)}{dv^2}+4v\dfrac{dK(v)}{dv}+2K(v)-2\dfrac{f'(0)}{v^3}$ (28)

2.1.5 Aboodh Transform of Some Elementary Functions

$S.N.$	$f(t)$	$A\left[f(t)\right]$
1.	1	$\dfrac{1}{v^2}$

2.	t	$\frac{1}{v^3}$
3.	$t^n, n \geq 0$	$\frac{n!}{v^{n+2}}$
4.	e^{at}	$\frac{1}{v^2 - av}$
5.	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{v(v+a)^2}$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{v(v^2+a^2)}$
7.	$\cos at$	$\frac{1}{(v^2+a^2)}$
8.	$\sinh at$	$\frac{a}{v(v^2-a^2)}$
9.	$\cosh at$	$\frac{1}{(v^2-a^2)}$
10.	$J_0(t)$	$\frac{1}{v\sqrt{(1+v^2)}}$

NB. In the previous table a is a constant

Applications

Example 1. Solve the system of Volterra integral equations

$$\begin{cases} f(t) = 2 - e^{-t} + \int_0^t \left[(t-x)f(x) + (t-x)g(x)\right]dx \\ g(t) = 2t - e^t + 2e^{-t} + \int_0^t \left[(t-x)f(x) - (t-x)g(x)\right]dx \end{cases} \qquad (29)$$

Solution:

1. Taking Elzaki transform of both sides of each equation in (29) gives

$$\begin{cases} E[f][1-u^2] - u^2\,E[g] = \dfrac{u^2 + 2u^3}{1+u} \\ E[g][1+u^2] - u^2\,E[f] = \dfrac{u^2 - u^3 - 2u^5}{1-u^2} \end{cases} \qquad (30)$$

Solving this system of equations for $E[f]$, $E[g]$ gives

$$\begin{cases} E[f]=\dfrac{u^2}{1-u} \\ E[g]=\dfrac{u^2}{1+u} \end{cases} \tag{31}$$

By taking the inverse Elzaki transform of both sides of each equation in (31) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t),g(t)\right)=\left(e^t,e^{-t}\right) \tag{32}$$

2. Taking Aboodh transform of both sides of each equation in (29) gives

$$\begin{cases} A[f]\,[v^2-1]-A[g]=\dfrac{2+v}{1+v} \\ A[g][1+v^2]-A[f]=\dfrac{-2-v^2+v^3}{v(v^2-1)} \end{cases} \tag{33}$$

Solving this system of equations for $A[f]$, $A[g]$ gives

$$\begin{cases} A[f]=\dfrac{1}{v^2-v} \\ A[g]=\dfrac{1}{v^2+v} \end{cases} \tag{34}$$

By taking the inverse Aboodh transform of both sides of each equation in (34) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t),g(t)\right)=\left(e^t,e^{-t}\right) \tag{35}$$

Example 2. Solve the system of Volterra integral equations

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{1}{12}t^4=\displaystyle\int_0^t\left[\left(t-x-1\right)f(x)+\left(t-x+1\right)g(x)\right]dx \\ \dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{1}{12}t^4=\displaystyle\int_0^t\left[\left(t-x+1\right)f(x)+\left(t-x-1\right)g(x)\right]dx \end{cases} \tag{36}$$

Solution:

1. Taking Elzaki transform of both sides of each equation in (36) gives

$$\begin{cases} u^3+3u^4+2u^5=[u-1]E[f]+[u+1]E[g] \\ 3u^3-u^4+2u^5=[u+1]E[f]+[u-1]E[g] \end{cases} \tag{37}$$

Solving this system of equations for $E[f]$, $E[g]$ gives

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

$$\begin{cases} E[f]=u^2+u^3 \\ E[g]=u^2+2u^4 \end{cases} \tag{38}$$

By taking the inverse Elzaki transform of both sides of each equation in (38) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t),g(t)\right)=\left(1+t,1+t^2\right) \tag{39}$$

2. Taking Aboodh transform of both sides of each equation in (36) gives

$$\begin{cases} 2+3v+v^2=\left(v^4-v^5\right)A[f]+\left(v^4+v^5\right)A[g] \\ 2-v+3v^2=\left(v^4+v^5\right)A[f]+\left(v^4-v^5\right)A[g] \end{cases} \tag{40}$$

Solving this system of equations for $A[f]$, $A[g]$ gives

$$\begin{cases} A[f]=\dfrac{1}{v^3}+\dfrac{1}{v^2} \\ A[g]=\dfrac{1}{v^2}+\dfrac{2}{v^4} \end{cases} \tag{41}$$

By taking the inverse Aboodh transform of both sides of each equation in (41) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t),g(t)\right)=\left(1+t,1+t^2\right) \tag{42}$$

Example 3. Solve the system of Volterra integral equations

$$\begin{cases} f(t)=t-\dfrac{1}{12}t^4-\dfrac{1}{20}t^5+\displaystyle\int_0^t\left[\left(t-x\right)g(x)+\left(t-x\right)h(x)\right]dx \\ g(t)=t^2-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{20}t^5+\displaystyle\int_0^t\left[\left(t-x\right)f(x)+\left(t-x\right)h(x)\right]dx \\ h(t)=\dfrac{5}{6}t^3-\dfrac{1}{12}t^4+\displaystyle\int_0^t\left[\left(t-x\right)f(x)+\left(t-x\right)g(x)\right]dx \end{cases} \tag{43}$$

Solution:

1. Taking Elzaki transform of both sides of each equation in (43) gives

$$\begin{cases} E[f]=u^3-2u^6-6u^7+u^2E[g]+u^2E[h] \\ E[g]=2u^4-u^5-6u^7+u^2E[f]+u^2E[h] \\ E[h]=5u^5-2u^6+u^2E[f]+u^2E[g] \end{cases} \tag{44}$$

Solving this system of equations for $E[f]$, $E[g]$, $E[h]$ gives

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

$$\begin{cases} E[f] = u^3 \\ E[g] = 2u^4 \\ E[h] = 6u^5 \end{cases} \tag{45}$$

By taking the inverse Elzaki transform of both sides of each equation in (45) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t), g(t), h(t)\right) = \left(t, t^2, t^3\right) \tag{46}$$

2. Taking Aboodh transform of both sides of each equation in (43) gives

$$\begin{cases} v^7\, A[f] = v^4 - 2v - 6 + v^5 A[g] + v^5 A[h] \\ v^7\, A[g] = 2v^3 - v^2 - 6 + v^5 A[f] + v^5 A[h] \\ v^7\, A[h] = 5v^2 - 2v + v^5 A[f] + v^5 A[g] \end{cases} \tag{47}$$

Solving this system of equations for $A[f]$, $A[g]$, $A[h]$ gives

$$\begin{cases} A[f] = \dfrac{1}{v^3} \\ A[g] = \dfrac{2}{v^4} \\ A[h] = \dfrac{6}{v^5} \end{cases} \tag{48}$$

By taking the inverse Aboodh transform of both sides of each equation in (48) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t), g(t), h(t)\right) = \left(t, t^2, t^3\right) \tag{49}$$

Example 4. Solve the system of Volterra integral equations

$$\begin{cases} -2 + 2\cosh t = \displaystyle\int_0^t \left[f(x) - g(x)\right] dx \\ -1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + e^t = \displaystyle\int_0^t \left[\left(t - x + 1\right) g(x) - \left(t - x - 1\right) h(x)\right] dx \\ t + \dfrac{1}{2}t^2 + t\,e^t = \displaystyle\int_0^t \left[\left(t - x\right) h(x) + \left(t - x + 1\right) f(x)\right] dx \end{cases} \tag{50}$$

Solution:

3. Taking Elzaki transform of both sides of each equation in (50) gives

$$\begin{cases} \dfrac{2u^4}{1-u^2} = u\,E[f] + uE[g] \\ \dfrac{2u^2-u^4}{1-u} = \left[u+1\right]E[g] - \left[u-1\right]E[h] \\ \dfrac{2u^2-u^3-u^4+u^5}{(u-1)^2} = uE[h] + \left[u+1\right]E[f] \end{cases} \tag{51}$$

Solving this system of equations for $E[f]$, $E[g]$, $E[h]$ gives

$$\begin{cases} E[f] = \dfrac{u^2}{1-u} + u^2 \\ E[g] = u^2 + \dfrac{u^2}{1+u} \\ E[h] = \dfrac{u^3}{\left(1-u\right)^2} \end{cases} \tag{52}$$

By taking the inverse Elzaki transform of both sides of each equation in (52) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t), g(t), h(t)\right) = \left(1+e^t, 1+e^{-t}, t\,e^t\right) \tag{53}$$

4. Taking Aboodh transform of both sides of each equation in (50) gives

$$\begin{cases} \dfrac{2}{v\left(v^2-1\right)} = A[f] - A[g] \\ \dfrac{2v^2-1}{v^2\left(v-1\right)} = \left(1+v\right)A[g] + \left(v-1\right)A[h] \\ \dfrac{1-v-v^2+2v^3}{v^2\left(v-1\right)^2} = \left(1+v\right)A[f] + A[h] \end{cases} \tag{54}$$

Solving this system of equations for $A[f]$, $A[g]$, $A[h]$ gives

$$\begin{cases} A[f] = \dfrac{1}{v^2} + \dfrac{1}{v^2-v} \\ A[g] = \dfrac{1}{v^2} + \dfrac{1}{v^2+v} \\ A[h] = \dfrac{1}{v\left(v-1\right)^2} \end{cases} \tag{55}$$

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

By taking the inverse Aboodh transform of both sides of each equation in (55) , the exact solutions are given by

$$\left(f(t), g(t), h(t)\right) = \left(1+e^{t}, 1+e^{-t}, t\,e^{t}\right) \tag{56}$$

Conclusion

In this paper, we have successfully discussed the comparative study of Elzaki and Aboodh transforms in solving systems of linear Volterra integral equations. The given applications in applications section show that both transforms (Elzaki and Aboodh transforms) are closely connected to each other, and they are both powerful and efficient methods. Finally, all solutions obtained in this article have been checked by putting them back into the original system.

References

[1] Aboodh, K.S. (2013).*The new integral transform "Aboodh transform"* ,Global Journal of Pure and Applied Mathematics, **9** (1), 35-43

[2] Aboodh, K. S. (2014). *Application of new transform "Aboodh transform" to partial differential equations*, Global Journal of Pure and Applied Math, **10** (2), 249-254

[3] Aggarwal, S. and Chauhan, R. (2019). *A comparative study of Mohand and Aboodh transforms*, International Journal of Research in Advent Technology, **7**(1), 520-529.

[4] Aggrawal, S. ,Sharma,N. and Chauhan, R. , *Application of Aboodh transform for solving linear Volterra Integro-differential Equations of Second Kind* , International Journal of Research in Advent Technology ,**6**(6) ,1186-1190.

[5] Alshikh ,A. , and Mahgoub ,M. (2016). *Solving systems of ordinary differential equations by Aboodh transform* , **34**(9).1144-1148.

[6] ELtayeb, H. and Kilicman, A. (2010), *On some applications of a new integral transform*, International Journal of Mathematical Analysis, **4**(3), 123-132.

[7] Eltayeb , H. and Kilicman,A. (2010), *A note on the Sumudu transforms and differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **4**(22), 1089-1098.

[8] Elzaki,T. M. (2011). *The new integral transform "Elzaki transform"*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Number 1, 57-64.

[9] Elzaki T.M. & Elzaki, S.M. (2011), *Application of new transform "Elzaki transform" to partial differential equations*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, **7**(1), 65-70.

[10] Elzaki T.M. & Elzaki, S.M. (2011), *On the Connections between Laplace and Elzaki transforms*, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, **6** (1), 1-11.

[11] Elzaki T.M. & Elzaki, S.M. (2011), *On the Elzaki transform and ordinary differential equation with variable coefficients*, Advances in Theoretical and Applied Mathematics. **6**(1), 13-18.

[12] Kilicman A. and ELtayeb, H. (2010), *A note on integral transform and partial differential equation*, Applied Mathematical Sciences, **4** (3), 109-118.

[13] Kilicman, A. and Gadain, H.E. (2009), *An application of double Laplace transform and Sumudu transform*, Lobachevskii J. Math. **30** (3), 214-223.

[14] Mahgoub ,M. ,Aboodh, K., and Alshikh , A.(2016). *On the solution of ordinary differential equation with variable coefficients using Aboodh transform*, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, **11**(4) ,383-389.

[15] Wazwaz, A.M. ,(2011). *Linear and nonlinear integral equations* , Higher Education Press, Beijing.