ISSN : 2706-9087

جامعة المرقب
كلية الآداب والعلوم قصر الأخيار
ELMERGIB UNIVERSITY
FACULTY OF ART & SCIENCE KASR KHIAR - LIBYA

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

مجلة دورية نصف سنوية محكمة

في هذا العدد...

العدد
8
ISSUE

ديسمبر 2019
DESEMBER 2019

kshj@elmergib.edu.ly http://khsj.elmergib.edu.ly +21892516762

قواعد النشر

حرصاً من هيئة التحرير على استخدام الأسلوب العلمي في كتابة البحوث والدراسات المراد نشرها، ينبغي اتباع القواعد التالية :

الغلاف ينبغي أن يحتوى على العنوان واسم الباحث (الباحثين) ، والدرجة العلمية وجهة العمل ، والدولة ، والبريد الإلكتروني ، وسنة النشر .

المتن يشتمل على ملخص للبحث (عربي – إنجليزي) بعكس لغة البحث لا يتجاوز ورقة واحدة.

تخضع البحوث المقدمة للنشر للتحكيم العلمي ، ولهيئة التحرير أن تطلب من المؤلف بناء على اقتراح المحكمين بإجراء التعديلات المطلوبة على البحث قبل الموافقة على نشره .

ضوابط ومواصفات البحوث المقدمة للنشر:

1. أن يكون البحث أو الدراسة ضمن الموضوعات التي تختص بها المجلة .
2. ألاّ يكون البحث قد سبق نشره في إحدى المجلات أو مستلا من أطروحة علمية أو يكون الباحث قد تناوله بعنوان آخر في وسيلة نشر أخرى ويوثق ذلك بتعهد خطي بهذا الخصوص .
3. فيما يخص البحوث العربية تكتب هوامش البحث وقائمة المراجع وفق دليل جمعية علم النفس الأمريكية American Psychological Association(APA) الطبعة الخامسة بالنسبة للبحوث العربية وتكون الطباعة على وجه واحد على ورق (A4) بخط (Traditional Arabic) بحجم (14) للنص مع ترك مسافة 1 بين السطور وتكون الهوامش 2.5 سم و مع ترك هامش 3 سم من جهة التجليد ،
4. فيما يخص البحوث باللغة الإنجليزية تكتب وفق نظام (Modern Language Association (MLA ، بحجم خط (12) بخط (Times New Roman) مع ترك مسافة 1 بين السطور مع وجود ملخص باللغة العربية في بداية البحث بحيث لا تزيد صفحات البحث 17 صفحة ي يكون التوثيق داخل المتن (اللقب ، السنة ، الصفحة) .
5. عنوان البحث يجب أن يكون مختصرا قدر الإمكان وأن يعبر عن هدف البحث بوضوح ويتبع المنهجية العلمية من حيث التناول والإحاطة بأسلوب بحثي علمي ، وأن لا تزيد ورقات البحث عن 25 صفحة بما في ذلك صفحات الجداول والصور والرسومات وغيرها .
6. يجب على الباحث التقييد بأصول البحث العلمي وقواعده من حيث أسلوب العرض والمصطلحات وتوثيق المصادر والمراجع في آخر البحث ، وهو المسئول بالكامل عن صحة النقل من المصادر والمراجع المستخدمة ، وهيئة التحرير غير مسئولة عن أي نقل خاطئ "سرقات أدبية وعلمية " قد تحدث في تلك البحوث .
7. البحوث المقدمة للمجلة تخضع للتقييم من قبل متخصصين بشكل يضمن التقييم العلمي، ويتطلب من الباحث مراعاة سلامة بحثه من الأخطاء اللغوية والإملائية .
8. تلتزم المجلة بإشعار الباحث بقبول بحثه إن كان مقبولا للنشر أو قابلا للتعديل بعد التقييم على أن يرسل الباحث إذا قبل بحثه سيرة ذاتية (CV) مختصر قدر الإمكان يتضمن الاسم الثلاثي – والدرجة العلمية – والجامعة والكلية والقسم – وأهم المؤلفات إن وجدت – البريد الالكتروني – والهاتف .

9. البحوث المقدمة للمجلة لا تعاد لأصحابها سواء نشرت أو لم تنشر ، وهي تعبر عن رأي أصحابها فهم المسئولون عنها أدبيا وقانونيا ولا يمثل بالضرورة رأي المجلة .
10. المجلة تنشر كل ما يتعلق بالمجال العلمي والبحثي وما يتعلق بالمؤتمرات والندوات والأنشطة الأكاديمية وملخصات الرسائل العلمية ونقد الكتب على أن لا تزيد عن خمس صفحات مطبوعة
11. إشعار الباحث بقبول بحثه وإرجاعه للتصحيح أو الإضافة أو التعديل على أن يقوم بتزويد المجلة بنسخة من البحث في صورته النهائية على قرص مدمج(CD).
12. تعتبر البحوث قابلة للنشر من حيث صدور خطاب صلاحية النشر وتحال إلى الدور بانتظار الطبع حسب أولوية الدور وزخم الأبحاث المحالة للنشر .
13. يزود الباحث بنسخة من إعداد المجلة التي نشر بها بحثه .

هيئة تحرير المجلة

افتتاحية العدد

بسم الله الرحمن الرحيم

يسر هيئة تحرير مجلة العلوم الإنسانية والاجتماعية والعلمية أن تقدم الى القراء الكرام العدد الثامن بعد ان تم تعديل اسمها الى مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية بدلا من العنوان السابق بناء على ملاحظات القراء الكرام.

يأتي هذا العدد حافلا بمجموعة من البحوث والدراسات المتنوعة في مجالس العلوم الإنسانية والتطبيقية آملين أن يجد القارئ الكريم في هذا العدد مبتغاه.

وفي إطار تطور المجلة بعد ان نالت المجلة الاعتماد الدولي والاعتماد العربي فإننا نعيد تذكير السادة البحاث والمهتمين بالبحث العلمي بسياسة المجلة التي تعمل على تقديم أفضل البحوث والدراسات وفق منهجية علمية وتقديم مادة مفيدة من أجل تجويد وتحسين الإنتاج العلمي بحيث تكون الدراسات والبحوث تتناول موضوعات شتى في مختلف ميادين المعرفة سواء في مجال العلوم الإنسانية أو التطبيقية.

كما نذكر السادة البحاث فإن المجلة تفتح أبوابها لاستقبال المزيد من الإنتاج العلمي الرصين سواء على المستوي المحلي أو العربي أو الدولي، وفي الوقت نفسه نعتذر للسادة البحاث الذين قدموا بحوثهم ولم يتم استكمال تقييمها نظرا للظروف التي يمر بها البلاد فإننا سننشر الصالح منها في الاعداد القادمة بعون الله تعالى.

والله ولي التوفيق

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

Fekete-Szegö Inequalities for Certain subclasses of p-Valent Functions of Complex Order Associated with Fractional Derivative Operator

S. M. Amsheri
Department Of Mathematics, Faculty of Science
Elmergib University, Libya
somia_amsheri@Yahoo.Com

L. A. Alnajjar
Department Of Mathematics, Faculty of Science
Misurata University, Libya
Lona.hl.najjar@gmail.com

Abstract

In the present paper, we obtain Fekete-Szegö inequalities and sharp bounds for some subclasses of analytic and p-valent functions in the open unit disk defined by certain fractional derivative operator.

Keywords: p-valent function, subordination, starlike function, convex function, fractional derivative operator, Fekete-Szegö inequality.

Introduction And Definitions

Let $A(p)$ denote the class of functions defined by

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n}, \qquad (p \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

which are analytic and p-valent in the open unit disk $\mathcal{U} = \{z: |z| < 1\}$.

Let $f(z)$ and $g(z)$ be functioning analytic in $\mathcal{U}$, we say that the function $f(z)$ is a subordinate to $g(z)$, if there exists a Schwarz function $w(z)$, analytic in $\mathcal{U}$, with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathcal{U})$, such that $f(z) = g(w(z))$ for all $z \in \mathcal{U}$.

This subordination is denoted by $f \prec g$ or $f(z) \prec g(z)$. It is well known that, if the function $g(z)$ is univalent in $\mathcal{U}$, $f(z) \prec g(z)$ if and only if $f(0) = g(0)$ and $f(\mathcal{U}) \subset g(\mathcal{U})$.

Let $\phi(z)$ be an analytic function with $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) > 0$ and $\mathrm{Re}(\phi(z)) > 0$ $(z \in \mathcal{U})$, which maps the open unit disk $\mathcal{U}$ onto a region starlike with respect to 1 and is symmetric with respect to the real axis . Ali et al. [1] defined and studied the class $S_{b,p}^*(\phi)$ to be the class of functions $f(z) \in A(p)$ for which

$$1+\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{p}\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right\} \prec \phi(z), \qquad (z\in\mathcal{U}, b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}) \tag{1.2}$$

and the class $C_{b,p}(\phi)$ of all functions for which

$$1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bp}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \prec \phi(z), \qquad (z\in\mathcal{U}, b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}) \tag{1.3}$$

Note that $S_{1,1}^*(\phi)=S^*(\phi)$ and $C_{1,1}(\phi)=C(\phi)$, The classes were introduced and studied by Ma and Minda [2]. The familiar class $S^*(\alpha)$ of starlike functions of order α and the class $C(\alpha)$ of convex functions of order $\alpha,\ 0\le\alpha<1$ are the special cases of $S_{1,1}^*(\phi)$ and $C_{1,1}(\phi)$, respectively, when

$$\phi(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}.$$

We recall the following definitions of fractional derivative operators which were used by Owa [4] and see [6] and [7] as follows:

Definition 1.1. The fractional derivative operator of order λ is defined, for a function $f(z)$, by

$$D_z^\lambda f(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{f(\xi)}{(z-\xi)^\lambda}d\xi\,, \qquad 0\le\lambda<1 \tag{1.4}$$

where $f(z)$ is analytic function in a simply-connected region of the z-plane containing the origin, and the multiplicity of $(z-\xi)^{-\lambda}$ is removed by requiring $\log(z-\xi)$ to be real when $z-\xi>0$.

With the aid of the above definition, we define a generalization of the fractional derivative operator $\Omega_{0,z}^{\lambda,p}$ by

$$\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)=\frac{\Gamma(1+p-\lambda)}{\Gamma(1+p)}\,z^\lambda\,D_{0,z}^\lambda f(z) \tag{1.5}$$

for $f(z)\in A(p)$, $p\in\mathbb{N}$ and $0\le\lambda<1$. Then it is observed that $\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)$ maps $A(p)$ onto itself as follows:

$$\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)=z^p+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\lambda,p)\,a_{p+n}\,z^{p+n}\ , \tag{1.6}$$

where

$$\varphi_n(\lambda,p)=\frac{\Gamma(1+p-\lambda)\Gamma(1+p+n)}{\Gamma(1+p)\Gamma(1+p-\lambda+n)}\ ,\qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{1.7}$$

We let $\varphi_n(\lambda,p)\equiv\varphi_n$, and notice that

$$\Omega_{0,z}^{0,p}f(z)=f(z),$$

and

$$\Omega_{0,z}^{1,p}f(z)=\frac{zf'(z)}{p}.$$

Motivated by the classes $S_{b,p}^{*}(\phi)$ and $C_{b,p}(\phi)$ which were studied by Ali et al. [1], we introduce a more general class of complex order $S_{b,p,\beta}^{\lambda}(\phi)$ which we define in the following.

Definition 1.2. Let $\phi(z)$ be an univalent starlike function with respect to 1 which maps the open unit disk $\mathcal{U}$ onto a region in the right half-plane and symmetric with respect to the real axis, $\phi(0)=1$ and $\phi'(0)>0$. A functions $f(z)\in A(p)$ is in the class $S_{b,p,\beta}^{\lambda}(\phi)$ if

$$1+\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{p}\,\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'+\beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)+\beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'}-1\right\}\prec\phi(z), \tag{1.8}$$

where $b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $0\le\beta\le1$, $0\le\lambda<1$, $p\in\mathbb{N}$ and $z\in\mathcal{U}$. Also, we let $S_{1,p,\beta}^{\lambda}(\phi)=S_{p,\beta}^{\lambda}(\phi)$.

The above class $S_{b,p,\beta}^{\lambda}(\phi)$ is of special interest and it contains many well-known classes of analytic functions. In particular; for $\lambda=0$ and $\beta=0$, we have

$$S_{b,p,0}^{0}(\phi)=S_{b,p}^{*}(\phi)$$

where $S_{b,p}^{*}(\phi)$ is precisely the class which was studied by Ali et al. [1], while for $\lambda=0$ and $\beta=1$, we have

$$S_{b,p,1}^{0}(\phi)=C_{b,p}(\phi)$$

where $C_{b,p}(\phi)$ is precisely the class which was introduced by Ali et al. [1].

Furthermore, by specializing the parameters λ,b,p and β we obtain the following subclasses which were studied by various others:

1- For $\lambda=0$, $b=1$, $p=1$ and $\beta=0$, we get the class $S_{1,1,0}^{0}(\phi)=S^{*}(\phi)$ which was studied by Ma and Minda [2].

2- For $\lambda=0,\ b=1, p=1$ and $\beta=1$, we get the class $S^{0}_{1,1,1}(\phi)=C(\phi)$ which was studied by Ma and Minda [2].
3- For $\lambda=0, p=1$ and $\beta=0$, we have the class $S^{0}_{b,1,0}(\phi)=S^{*}_{b}(\phi)$ which was studied by Ravichandran et al. [5].
4- For $\lambda=0, p=1$ and $\beta=1$, we have the class $S^{0}_{b,1,0}(\phi)=C_{b}(\phi)$ which was studied by Ravichandran et al. [5].
5- For $\lambda=0,\ b=1$ and $\beta=0$, we get the class $S^{0}_{1,p,0}(\phi)=S^{*}_{p}(\phi)$ which was studied by Ali et al. [1].

Very recently, Ali et al. [1] obtained the sharp coefficient inequalities for functions in the class $S^{*}_{b,p}(\phi)$ and many other subclasses of $A(p)$.

In the present paper, we obtain Fekete-Szegö inequalities of the functions belonging to the classes $S^{\lambda}_{1,p,\beta}(\phi)$ and $S^{\lambda}_{b,p,\beta}(\phi)$. These results are extended to the other classes that were defined earlier. See [1], [2] and [5] for Fekete-Szegö problem for certain related classes of functions.

Let Ω be the class of analytic functions of the form

$$w(z)=w_1z+w_2z^2+\cdots$$

in the open unit disk $\mathcal{U}$ satisfying the condition $|w(z)|<1$. In order to prove our main results, we need the following lemmas which shall be used in the sequel.

Lemma 1.3 [1]. If $w\in\Omega$, then

$$|w_2-tw_1^2|\leq\begin{cases}-t & if \quad t\leq -1,\\ 1 & if \quad -1\leq t\leq 1,\\ t & if \quad t\geq 1.\end{cases}$$

when $t<-1$ or $t>1$, equality holds if and only if $w(z)=z$ or one of its rotations. If $-1<t<1$, then equality holds if and only if $w(z)=z^2$ or one of its rotations. Equality holds for $t=-1$ if and only if

$$w(z)=z\frac{\lambda+z}{1+\lambda z}, \qquad (0\leq\lambda\leq 1)$$

or one of its rotations, while for $t=1$, the equality holds if and only if

$$w(z)=-z\frac{\lambda+z}{1+\lambda z}, \qquad (0\leq\lambda\leq 1)$$

or one of its rotations .

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

Although the above upper bound is sharp, it can be improved as follows when $-1 < t < 1$:

$$|w_2 - tw_1^2| + (t+1)|w_1|^2 \le 1\,, \qquad (-1 < t \le 0)$$

and

$$|w_2 - tw_1^2| + (1-t)|w_1|^2 \le 1\,, \qquad (0 < t < 1).$$

Lemma 1.4 [3, inequality 7, p.10]**.** If $w \in \Omega$, then for any complex number t,

$$|w_2 - tw_1^2| \le \max(1, |t|).$$

The result is sharp for the functions $w(z) = z$ or $w(z) = z^2$.

1- Coefficient bounds

By making use of Lemmas 1.4-1.5, we prove the following:

Theorem 2.1. Let $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$, where B_n 's are real with $B_1 > 0, B_2 \ge 0$, and θ is a real number and

$$\sigma_1 = \frac{\varphi_1^2(1+\beta p)^2[(B_2 - B_1) + pB_1^2]}{2\varphi_2 p B_1^2[(1+\beta p)^2 - \beta^2]}\,, \tag{2.1}$$

$$\sigma_2 = \frac{\varphi_1^2(1+\beta p)^2[(B_2 + B_1) + pB_1^2]}{2\varphi_2 p B_1^2[(1+\beta p)^2 - \beta^2]}\,, \tag{2.2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\varphi_1^2(1+\beta p)^2[B_2 + pB_1^2]}{2\varphi_2 p B_1^2[(1+\beta p)^2 - \beta^2]}\,. \tag{2.3}$$

If $f(z)$ given by (1.1) belongs to the class $S_{p,\beta}^{\lambda}(\phi)$ and φ_1, φ_2 given by (1.7), then

$$|a_{p+2} - \theta a_{p+1}^2| \le \begin{cases} \dfrac{p}{2\varphi_2}\left(\dfrac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\left\{B_2 + pB_1^2\left[1 - \dfrac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1 - \dfrac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right)\right]\right\}\,, & \theta \le \sigma_1, \\ \dfrac{pB_1}{2\varphi_2}\left(\dfrac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right) & , \sigma_1 \le \theta \le \sigma_2, \\ \dfrac{p}{2\varphi_2}\left(\dfrac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\left\{-B_2 + pB_1^2\left[\dfrac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1 - \dfrac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right) - 1\right]\right\}\,, & \theta \ge \sigma_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Further, if $\sigma_1 \le \theta \le \sigma_3$, then

$$|a_{p+2} - \theta a_{p+1}^2| + \frac{\varphi_1^2(1+\beta p)^2}{2\varphi_2 p B_1[(1+\beta p)^2 - \beta^2]}\left\{1 - \frac{B_2}{B_1} + \left[\frac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right) - 1\right] pB_1\right\}|a_{p+1}|^2 \le \frac{pB_1}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right) \tag{2.5}$$

If $\sigma_3 \le \theta \le \sigma_2$, then

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

$$\left|a_{p+2}-\theta a_{p+1}^2\right|+\frac{\varphi_1^2(1+\beta p)^2}{2\varphi_2 pB_1[(1+\beta p)^2-\beta^2]}\left\{1+\frac{B_2}{B_1}-\left[\frac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1-\frac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right)-1\right]pB_1\right\}\left|a_{p+1}\right|^2$$
$$\leq\frac{pB_1}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right) \tag{2.6}$$

For any complex number,

$$\left|a_{p+2}-\theta a_{p+1}^2\right|\leq\frac{pB_1}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\max\left\{1,\left|\frac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1-\frac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right)pB_1-\frac{B_2}{B_1}-pB_1\right|\right\} \tag{2.7}$$

The results are sharp.

Proof. If $f(z)\in S_{p,\beta}^{\lambda}(\phi)$, then there is a Schwarz function

$$w(z)=w_1z+w_2z^2+\cdots\ \in\Omega$$

such that

$$\frac{1}{p}\,\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'+\beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)+\beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'}=\phi\big(w(z)\big) \tag{2.8}$$

since

$$\frac{1}{p}\,\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'+\beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)+\beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}f(z)\right)'}=1+\frac{(1+\beta p)}{p[1+\beta(p-1)]}\varphi_1a_{p+1}z+$$
$$+\left[\frac{2}{p}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\varphi_2a_{p+2}-\frac{(1+\beta p)^2}{p[1+\beta(p-1)]^2}\varphi_1^2a_{p+1}^2\right]z^2+\cdots \tag{2.9}$$

We have from (2.8),

$$a_{p+1}=\frac{p[1+\beta(p-1)]B_1w_1}{\varphi_1(1+\beta p)}, \tag{2.10}$$

and

$$a_{p+2}=\frac{p}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\{B_1w_2+(B_2+pB_1^2)w_1^2\} \tag{2.11}$$

Therefore, we have

$$a_{p+2}-\theta a_{p+1}^2=\frac{pB_1}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\{w_2-vw_1^2\} \tag{2.12}$$

where

$$v:=\left[\frac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1-\frac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right)-1\right]pB_1-\frac{B_2}{B_1} \tag{2.13}$$

The results (2.4)-(2.7) are established by an application of Lemma 1.3 and inequality (2.7) by Lemma 1.4.

To show that the bounds in (2.4)-(2.7) are sharp, we define the functions $K_{\phi n}$ $(n=2,3,\ldots)$ by

$$\frac{1}{p}\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}K_{\phi n}(z)\right)' + \beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}K_{\phi n}(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}K_{\phi n}(z) + \beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}K_{\phi n}(z)\right)'} = \phi(z^{n-1}), \qquad K_{\phi n}(0) = \left(K_{\phi n}\right)'(0) - 1 = 0$$

and the functions F_r , G_r $(0 \leq r \leq 1)$ defined by

$$\frac{1}{p}\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}F_r(z)\right)' + \beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}F_r(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}F_r(z) + \beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}F_r(z)\right)'} = \phi\left(\frac{z(z+r)}{1+rz}\right), \qquad F_r(0) = F_r'(0) - 1 = 0$$

and

$$\frac{1}{p}\frac{z\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}G_r(z)\right)' + \beta z^2\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}G_r(z)\right)''}{(1-\beta)\,\Omega_{0,z}^{\lambda,p}G_r(z) + \beta\left(\Omega_{0,z}^{\lambda,p}G_r(z)\right)'} = \phi\left(-\frac{z(z+r)}{1+rz}\right), \qquad G_r(0) = G_r'(0) - 1 = 0$$

respectively, it is clear that the functions $K_{\phi n}$, F_r and G_r belong to the class $S_{p,\beta}^{\lambda}(\phi)$. If $\theta < \sigma_1$ or $\theta > \sigma_2$, then the equality holds if and only if f is $K_{\phi 2}$ or one of its rotations. If $\sigma_1 < \theta < \sigma_2$, the equality holds if and only if f is $K_{\phi 3}$ or one of its rotations. If $\theta = \sigma_1$, then the equality holds if and only if f is F_r or one of its rotations. If $\theta = \sigma_2$, then the equality holds if and only if f is G_r or one of its rotations.

Theorem 2.2. Let $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$, where B_n 's are real with $B_1 > 0$ and $B_2 \geq 0$.

If $f(z)$ given by (1.1) belongs to the class $S_{b,p,\beta}^{\lambda}(\phi)$ and φ_1, φ_2 given by (1.7), then for any complex number θ, we have

$$\left|a_{p+2} - \theta a_{p+1}^2\right| \leq \frac{p|b|B_1}{2\varphi_2}\left(\frac{1+\beta(p-1)}{1+\beta(p+1)}\right)\max\left\{1, \left|\left[\frac{2\theta\varphi_2}{\varphi_1^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{(1+\beta p)^2}\right) - 1\right]pB_1 - \frac{B_2}{B_1}\right|\right\} \tag{2.14}$$

The result is sharp.

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 2.1.

References

1- R. M. Ali, V. Ravichandran , N. Seenivasagan, Coefficient bounds for p-valent functions , Appl. Math. Comput. 187 (2007), 35-46.

2- W. Ma and D. Minda , A unified treatment of some special classes of univalent functions , in Proceeding of the conference on complex analysis, (Tianjin, 1992), Z. Li , F. Ren, L. Lang, and S. Zhang, Eds., Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, pp. 157-169, International Press, Cambridge, Mass, USA, 1994.

3- F. R. Keogh and E. P. Merkes, A coefficient inequality for certain classes of analytic functions , Proc. Amer. Math. Soc. 20(1)(1969), 8-12 .

4- Owa, S., On the distortion theorems-I, Kyungpook. Math. J. 18(1978),53-59.

5- V. Ravichandran, Y. Polatoglu , M. Bolcal, and A. Sen, Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order, Hacettepe J. Math. Stat. 34 (2005), 9-15.

6- H. M. Srivastava and S. Owa, (Eds), Univalent functions, fractional calculus, and their applications, Halsted Press/Ellis Horwood Limited/John Wiley and Sons, New York/Chichester/Brisbane/Toronto, 1989.

7- Srivastava, H. M. ; Owa, S. (Eds), Current topics in analytic function theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey London and Hong Kong, 1992.