



مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن كلية التربية جامعة المرقب

المجلد الثالث والعشرون
يوليو 2023م

هيئة التحرير

رئيس هيئة التحرير: د. مصطفى المهدي القط
مدير التحرير: د. عطية رمضان الكيلاني
سكرتير المجلة: أ. سالم مصطفى الديب

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
 - المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
 - كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
 - يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
 - البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .
- (حقوق الطبع محفوظة للكلية)



ضوابط النشر:

- يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :
- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

- 1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.
- 2- The research articles or manuscripts should be original and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.
- 3- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.
- 4- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.
- 5- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention

- 1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.
- 2- The research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.
- 3- The published articles represent only the authors' viewpoints.





Integral Averaging Techniques for Oscillation Nonlinear Differential Equations of Third Order

M. J. Saad¹, N. Kumaresan² and Kuru Ratnavelu²

¹Department of Mathematics, Education Faculty, University of Sirte, Sirte, Libya

²Institute of Mathematical Sciences, University of Malaya, 50603, Kuala Lumpur, Malaysia

masaa2011@yahoo.com

Abstract: In this paper, we study the sufficient conditions for oscillation of the solutions of the third order nonlinear equation of the form

$$\left(r(t)f(\ddot{x}(t)) \right)' + q(t)g_1(\dot{x}(t)) = H(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$$

and establish some oscillation theorems which guarantee that all solutions of the above equation are oscillatory. An illustrative example of the obtained result is given.

Keywords: Nonlinear equations, Oscillatory solutions, Runge Kutta method, Third order.

AMO (MOS) Subject Classification: 34 A 34, 34 C10.

Introduction:

In this paper, we are concerned with the problem of oscillation of third order nonlinear ordinary differential equation of the form

$$\left(r(t)f(\ddot{x}(t)) \right)' + q(t)g_1(\dot{x}(t)) = H(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)), \quad (E)$$

where r and q are continuous functions on the interval $[t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, $r(t)$ is a positive function, g_1 is continuously differentiable function on the real line \mathbb{R} except possibly at 0 with $yg_1(y) > 0$ and $g_1'(y) \geq k > 0$ for all $y \neq 0$, f is a continuous function on \mathbb{R} and $H: [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function such that $H(t, x, y, z)/g_1(y) \leq p(t)$ for all $y \neq 0$ and $t \geq t_0$. Throughout this paper, we restrict our attention only to the solutions of the differential equation (E) which exist on some ray $[t_0, \infty)$. A solution of the equation (E) is said to be oscillatory if it has an infinite number zeros, and otherwise it is said to be non-oscillatory. Equation (E) is called oscillatory if all its solutions are oscillatory, and otherwise it is called non-oscillatory.

In the recent years, many studies have been written on the oscillation behavior of solutions of first and second order differential equations. The study of oscillation of



differential equations of third order has received less attention than first and second order equations in the literature. See for example to [1-12]. Many other studies dealing with oscillation for linear equations, for instance, Lazer [10], Erbe [2], G. D. Jones [7] and W. J. Kim [9]. For nonlinear equations, we can refer as examples to Erbe [3], Heidel [6], A. Tiryaki and S. Yaman [12] and I. T. Kiguradze [8]. Hanan [5] studied the third order linear differential equation

$$\overset{\dots}{x}(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (E_1)$$

and presented some sufficient conditions for oscillation of equation (E_1) and showed that if

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^3 q(t) > \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

then every solution of equation is oscillatory. Adamets and Lomtatidze [1] studied an oscillatory behavior of the equation (E_1) where q is an inetgrable function on $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$, which is eventually of one sign.

Moussadek Remili [11] considered the following third order nonlinear equation

$$\overset{\dots}{x}(t) + q(t)g(x(t)) = 0 \quad (E_2)$$

and gave some sufficient conditions for oscillation of equation (E_2) .

Oscillation Results:

In this section, we give some oscillation criteria for oscillation of equation (E) .

Theorem 2.1: Suppose that

$$(1) \quad 0 < \int_{\pm \varepsilon}^{\pm \infty} \frac{du}{g_1(u)} < \infty \text{ for all } \varepsilon > 0,$$

$$(2) \quad 0 < k_1 < \frac{f(z)}{z} < k_2 \text{ for all } z \neq 0,$$

$$(3) \quad \int_T^\infty \frac{ds}{r(s)} \leq M_1 \text{ for all } T \geq t_0,$$

$$(4) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \frac{1}{r(s)} \int_T^s (q(u) - p(u)) du ds = \infty,$$

where $p: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Then, every solution of equation (E) is oscillatory.



Proof: Without loss of generality, we assume that there exists a solution $x(t) > 0$ of equation (E) such that $x(t) > 0$ and $\dot{x}(t) > 0$ on $[T, \infty)$ for some $T \geq t_0 \geq 0$. Define

$$\omega(t) = \frac{r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))}, t \geq T.$$

This and (E₃) and condition (2), we have

$$\dot{\omega}(t) = \left(\frac{r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))} \right) \leq p(t) - q(t), t \geq T.$$

Integrate the last inequality from T to t and also by condition (2), we have

$$\frac{k_1 r(t) \ddot{x}(t)}{g_1(\dot{x}(t))} \leq \omega(T) - \int_T^t (q(s) - p(s)) ds, t \geq T. \quad (2-1)$$

Integrate (2-1) divided by $r(t)$ from T to t , we obtain

$$k_1 \int_T^t \frac{\ddot{x}(s) ds}{g_1(\dot{x}(s))} \leq \omega(T) \int_T^t \frac{ds}{r(s)} - \int_T^t \frac{1}{r(s)} \int_T^s (q(u) - p(u)) du ds, t \geq T. \quad (2-2)$$

By condition (1), we obtain

$$\int_{\dot{x}(T)}^{\dot{x}(t)} \frac{du}{g(u)} \leq \begin{cases} 0 & , \text{if } \dot{x}(t) < \dot{x}(T) \\ \int_{\dot{x}(T)}^{\infty} \frac{du}{g(u)} & , \text{if } \dot{x}(t) \geq \dot{x}(T) \end{cases}$$

This follows that

$$\int_T^t \frac{\ddot{x}(s)}{g_1(\dot{x}(s))} ds \geq A_1,$$

$$\text{where } A_1 = \inf_{\dot{x}(T)} \int_{\dot{x}(T)}^{\infty} \frac{du}{g_1(u)}.$$

Thus, the inequality (2-2) becomes



$$\int_T^t \frac{1}{r(s)} \int_T^s (q(u) - p(u)) du ds \leq \omega(T) \int_T^t \frac{ds}{r(s)} - k_1 A_1, t \geq T.$$

By condition (3) and taking the limit superior on both sides, we have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \frac{1}{r(s)} \int_T^s (q(u) - p(u)) du ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \omega(T) M_1 - k_1 A_1 \} < \infty,$$

as $t \rightarrow \infty$, which contradicts to the condition (4). Hence, the proof is completed.

Theorem 2.2: Suppose, in addition to the conditions (1) and (2) hold that there exists the differentiable function $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ and $\dot{\rho} \geq 0$ such that

$$(5) \quad \int_T^\infty \frac{ds}{\rho(s)r(s)} \leq M_2 \text{ for all } T \geq t_0,$$

$$(6) \quad \int_T^\infty \frac{1}{\rho(s)r(s)} \int_T^s \left[\rho(u)(q(u) - p(u)) - k_3 \frac{\dot{\rho}^2(u)r(u)}{\rho(u)} \right] du ds = \infty.$$

Then, every solution of equation (E) is oscillatory.

Proof

Without loss of generality, we assume that there exists a solution $x(t) > 0$ of equation (E) such that $x(t) > 0$ and $\dot{x}(t) > 0$ on $[T, \infty)$ for some $T \geq t_0 \geq 0$.

Define

$$\omega(t) = \frac{\rho(t)r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))}, t \geq T.$$

This, (E) and condition (2), we have

$$\dot{\omega}(t) \leq \rho(t)p(t) - \rho(t)q(t) + \frac{k_2 \dot{\rho}(t)r(t)\ddot{x}(t)}{g_1(\dot{x}(t))} - \frac{kk_1 \rho(t)r(t)\ddot{x}^2(t)}{g_1^2(\dot{x}(t))}, t \geq T.$$

Integrate the last inequality, we get

$$\frac{\rho(t)r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))} \leq \omega(T) - \int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s)) ds - \int_T^t \left[\frac{kk_1 \rho(s)r(s)\ddot{x}^2(s)}{g_1^2(\dot{x}(s))} - \frac{k_2 \dot{\rho}(s)r(s)\ddot{x}(s)}{g_1(\dot{x}(s))} \right] ds. \quad (2-3)$$



From the second integral in the R. H. S., we have

$$\begin{aligned}
 -\int_T^t \left[\frac{kk_1 \rho(s)r(s)}{g_1^2(x(s))} \ddot{x}^2(s) - \frac{\dot{\rho}(s)r(s)}{g_1(x(s))} \ddot{x}(s) \right] ds &= -\int_T^t \left(\frac{\sqrt{kk_1 \rho(s)r(s)}}{g_1(x(s))} \ddot{x}(s) - \frac{k_2 \dot{\rho}(s)\sqrt{r(s)}}{2\sqrt{kk_1 \rho(s)}} \right)^2 ds \\
 &+ \frac{k_2^2}{4kk_1} \int_T^t \frac{\dot{\rho}^2(s)r(s)}{\rho(s)} ds \quad \text{wher} \\
 &\leq k_3 \int_T^t \frac{\dot{\rho}^2(s)r(s)}{\rho(s)} ds, \quad (2-4) \\
 \text{e } k_3 &= \frac{k_2^2}{4kk_1}.
 \end{aligned}$$

From (2-4) in (2-3), we obtain

$$\frac{\rho(t)r(t)\ddot{x}(t)}{g_1(x(t))} \leq \omega(T) - \int_T^t \left[\rho(s)(q(s) - p(s)) - k_3 \frac{\dot{\rho}^2(s)r(s)}{\rho(s)} \right] ds.$$

By condition (2) and integrating the last inequality divided by $\rho(t)r(t)$, we obtain

$$k_1 \int_T^t \frac{\ddot{x}(s)}{g_1(x(s))} ds \leq \omega(T) \int_T^t \frac{ds}{\rho(s)r(s)} - \int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \int_T^s \left[\rho(u)(q(u) - p(u)) - k_3 \frac{\dot{\rho}^2(u)r(u)}{\rho(u)} \right] du ds$$

By using the condition (1) and as in Theorem 2.1 the first integral in the L. H. S. is bounded and condition (5), then we get

$$\int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \int_T^s \left[\rho(u)(q(u) - p(u)) - k_3 \frac{\dot{\rho}^2(u)r(u)}{\rho(u)} \right] du ds \leq \omega(T)M_2 - k_1A_1 < \infty,$$

As $t \rightarrow \infty$, which contradicts to the condition (6). Hence, the proof is completed.

Theorem 2.3: Suppose, in addition to the conditions (1) and (2) hold that there exists the differentiable function $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\dot{\rho} \geq 0$, $(\rho r)^\bullet \leq 0$ and $(\dot{\rho} r)^\bullet \leq 0$ such that

$$(7) \quad \int_T^\infty \frac{ds}{\rho(s)r(s)} = \infty,$$

$$(8) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s)) ds > -\infty,$$



$$(9) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \int_T^s \rho(u)(q(u) - p(u)) du ds = \infty,$$

then, every solution of equation (E) is oscillatory.

Proof: Without loss of generality, we assume that there exists a solution $x(t) > 0$ of equation (E) such that $x(t) > 0$ and $\dot{x}(t) > 0$ on $[T, \infty)$ for some $T \geq t_0 \geq 0$. Define

$$\omega(t) = \frac{\rho(t)r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))}, t \geq T.$$

This and equation (E), we have

$$\dot{\omega}(t) \leq \rho(t)p(t) - \rho(t)q(t) + \frac{\dot{\rho}(t)r(t)f(\ddot{x}(t))}{g_1(\dot{x}(t))} - \frac{\rho(t)r(t)f(\ddot{x}(t))\ddot{x}(t)g_1'(\dot{x}(t))}{g_1^2(\dot{x}(t))}, t \geq T.$$

By condition (2), we have

$$\dot{\omega}(t) \leq -\rho(t)(q(t) - p(t)) + \frac{k_2 \dot{\rho}(t)r(t)\ddot{x}(t)}{g_1(\dot{x}(t))} - \frac{g_1'(\dot{x}(t))}{k_2 \rho(t)r(t)} \omega^2(t), t \geq T. \quad (2-5)$$

Integ

rating (2-5) from T to t , we get

$$\int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s)) ds \leq \omega(t) - \omega(T) + k_2 \int_T^t \frac{\dot{\rho}(s)r(s)\ddot{x}(s)}{g_1(\dot{x}(s))} ds - \frac{k}{k_2} \int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds. \quad (2-6)$$

Since $\dot{\rho}(t)r(t)$ is a decreasing function, then by the Bonnet's theorem there exists a $a_t \in [T, t]$ such that the first integral in the R. H. S. becomes

$$k_2 \int_T^t \frac{\dot{\rho}(s)r(s)\ddot{x}(s)}{g_1(\dot{x}(s))} ds = k_2 \dot{\rho}(T)r(T) \int_{x(T)}^{x(a_t)} \frac{du}{g_1(u)}.$$

By condition (1), we have

$$k_2 \dot{\rho}(T)r(T) \int_{x(T)}^{x(a_t)} \frac{du}{g_1(u)} \leq \begin{cases} 0 & , \text{if } \dot{x}(a_t) < x(T), \\ k_2 \dot{\rho}(T)r(T) \int_{x(T)}^{\infty} \frac{du}{g_1(u)} & , \text{if } \dot{x}(a_t) \geq x(T). \end{cases}$$

Hence



$$0 < k_2 \dot{\rho}(T)r(T) \int_{\dot{x}(T)}^{\dot{x}(a_1)} \frac{du}{g(u)} \leq A_2, \quad (2-7)$$

$$\text{where } A_2 = k_2 \dot{\rho}(T)r(T) \int_{\dot{x}(T)}^{\infty} \frac{du}{g(u)}.$$

From (2-7) in (2-6), we get

$$\int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s))ds \leq \omega(T) - \omega(t) + A_2 - \frac{k}{k_2} \int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds. \quad (2-8)$$

We

have two cases for the integral

$$\int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds.$$

Case 1: If

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \text{ is finite.}$$

Thus, there exists a positive constant B such that

$$\int_T^t \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \leq B \text{ for } t \geq T.$$

Thus, (2-8) becomes

$$\int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s))ds \leq A_3 - \omega(t), \quad t \geq T,$$

where $A_3 = \omega(T) + A_2 + -kB/k_2$.

Integrating the last inequality from T to t , we get

$$\int_T^t \int_T^s \rho(u)(q(u) - p(u))du ds \leq A_3(t - T) - \int_T^t \omega(s) ds. \quad (2-9)$$

By using the Schwarz's inequality, we obtain



$$-\int_T^t \omega(s) ds \leq \left| \int_T^t \omega(s) ds \right|^2 = \left| \int_T^t \frac{\omega(s)}{\sqrt{\rho(s)r(s)}} \sqrt{\rho(s)r(s)} ds \right|^2 \leq \int_T^t \frac{\omega^2(s)}{\rho(s)r(s)} ds \int_T^t \rho(s)r(s) ds \quad \text{From (2-10)}$$

$$\leq B \int_T^t \rho(s)r(s) ds. \quad (2-10)$$

10) in (2-9), we obtain

$$\int_T^t \int_T^s \rho(u)(q(u) - p(u)) du ds \leq A_3(t-T) + B \int_T^t \rho(s)r(s) ds$$

$$\leq A_3(t-T) + B\rho(T)r(T)(t-T).$$

Dividing the last inequality by t and taking the limit superior on both sides, we have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \int_T^s \rho(u)(q(u) - p(u)) du ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(A_3 + B\rho(T)r(T) \right) \left(1 - \frac{T}{t} \right) \right\} < \infty,$$

as $t \rightarrow \infty$, which contradicts to the condition (9).

Case 2: If the integral

$$\int_T^\infty \frac{1}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \text{ is infinite,}$$

by condition $\dot{g}'_1(x(t)) \geq k$, we get

$$\int_T^\infty \frac{\dot{g}'_1(x(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds = \infty. \quad (2-11)$$

Integrating (2-5), from (2-7) and condition (8), it follows that here exists a constant A_4 such that

$$-\omega(t) \geq A_5 + \frac{1}{k_2} \int_T^t \frac{\dot{g}'_1(x(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds, \quad (2-12)$$

where $A_5 = \omega(T) + A_2 + A_4$.

From (2-11), we get $\omega(t)$ is negative on $[T, \infty)$. Furthermore, we choose a $T_1 \geq T$ such that

$$A_6 = A_5 + \frac{1}{k_2} \int_T^{T_1} \frac{\dot{g}'_1(x(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds.$$

Thus, for $t \geq T_1$, we have



$$\begin{aligned} \frac{g_1'(\dot{x}(t))\omega^2(t)}{k_2\rho(t)r(t)} \left[A_5 + \frac{1}{k_2} \int_T^t \frac{g_1'(\dot{x}(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \right]^{-1} &\geq - \frac{g_1'(\dot{x}(t))f(\ddot{x}(t))}{k_2g_1(\dot{x}(t))} \\ &\geq - \frac{g_1'(\dot{x}(t))\ddot{x}(t)}{g_1(\dot{x}(t))}. \end{aligned}$$

Thus

$$\log \left[A_5 + \frac{1}{k_2} \int_T^t \frac{g_1'(\dot{x}(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \right] / A_6 \geq \log \frac{g_1(\dot{x}(T_1))}{g_1(\dot{x}(t))}.$$

Hence

$$A_5 + \frac{1}{k_2} \int_T^t \frac{g_1'(\dot{x}(s))}{\rho(s)r(s)} \omega^2(s) ds \geq A_6 \frac{g_1(\dot{x}(T_1))}{g_1(\dot{x}(t))}.$$

By (2-12), we get

$$-\omega(t) \geq A_6 \frac{g_1(\dot{x}(T_1))}{g_1(\dot{x}(t))}.$$

From the last inequality and condition (2), we obtain

$$k_1 \ddot{x}(t) \leq -A_6 g_1(\dot{x}(T_1)) \frac{1}{\rho(t)r(t)}.$$

Integrate from T_1 to t and condition (7), we have

$$k_1 \dot{x}(t) \leq k_1 \dot{x}(T_1) - A_6 g_1(\dot{x}(T_1)) \int_{T_1}^t \frac{ds}{\rho(s)r(s)} \rightarrow -\infty, \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

this contradicts to the assumption that $\dot{x}(t) > 0$. This completes the proof of Theorem 2.3.

Example2.1: Consider the following differential equation

$$\left(\frac{1}{t^4} \ddot{x}(t) \right)' + t^4 \dot{x}^5(t) = \frac{\dot{x}^5(t) \sin^2(\ddot{x}(t))}{t^6}, t > 0.$$



We have $r(t) = \frac{1}{t^4}$, $q(t) = t^4$ and $g(x) = x^5$, $x g(x) = x^6 > 0$ for all $x > 0$

and

$$0 < \int_{\pm \varepsilon}^{\pm \infty} \frac{du}{g(u)} = \frac{1}{4\varepsilon^4} < \infty.$$

(1) $f(x(t)) = x(t)$ and $0 < 1 \leq \frac{f(x(t))}{x(t)} = 1 < 2$ for all $x \neq 0$.

$$(2) H(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = \frac{x^5(t) \sin^2(x(t))}{t^6} \text{ and}$$

$$\frac{H(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))}{g_1(x(t))} = \frac{\sin^2(x(t))}{t^6} \leq \frac{1}{t^6} = p(t) \text{ for all } x \neq 0 \text{ and } t > 0. \text{ Taking}$$

$$\rho(t) = t^2, \dot{\rho}(t) = 2t, (\rho r)'(t) = -\frac{1}{t} < 0 \text{ and } (\dot{\rho} r)'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0 \text{ for } t > 0 \text{ such that}$$

$$(3) \int_T^\infty \frac{ds}{\rho(s)r(s)} = \int_T^\infty s^2 ds = \infty,$$

$$(4) \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \rho(s)(q(s) - p(s)) ds = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_T^t s^2 \left(s^4 - \frac{1}{s^6} \right) ds = \infty > -\infty,$$

$$(5) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \int_T^s \rho(u)(q(u) - p(u)) du ds \\ = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \int_T^s u^2 \left(u^4 - \frac{1}{u^6} \right) du ds = \infty$$

All conditions of Theorem 2.3 are satisfied, thus, the given equation is oscillatory. We also compute the numerical solutions of the given differential equation using Runge Kutta method of fourth order. We have

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = \frac{x^5(t) \sin^2(x(t))}{t^2} - x^5(t),$$

with initial conditions $x(1) = 0.5$, $\dot{x}(1) = -1$, $\ddot{x}(1) = 0$ on the chosen interval $[1, 100]$ and finding values of the functions r , q and f where we consider $H(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = g(t)l(x, \dot{x}, \ddot{x})$.



K	t_k	$x(t_k)$
1	1	0.5
2	1.0796	0.4205
3	1.1592	0.3414
.	.	.
.	.	.
7	1.7142	-0.1621
8	1.9121	-0.31
9	2.1099	-0.4382
.	.	.
.	.	.
19	5.01	0.0254
20	5.0592	0.0697
21	5.1084	0.1148
.	.	.
.	.	.
47	10.8023	-0.0945
48	11.0638	-0.2944
49	11.3252	-0.4605

Table 1: Numerical solution of ODE 1

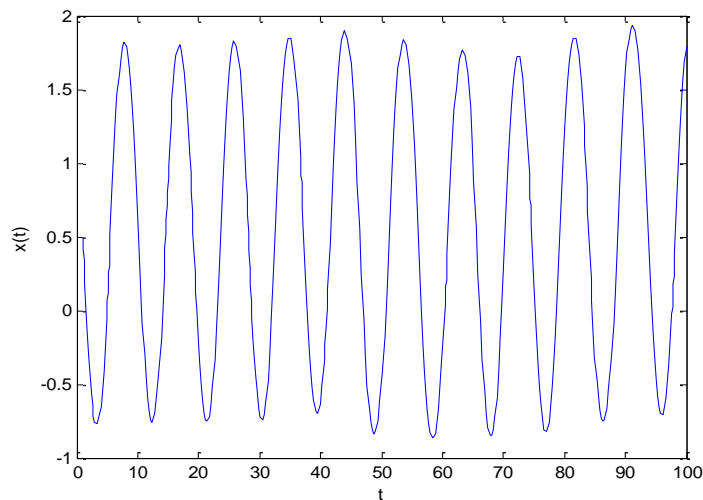


Figure 1: Solution curve of ODE 1

Remark 2.1: Our theorems extend and improve obtained results by Hanan [5], Adamets and Lomtatidze [1], A. C. Lazer [10], G. D. Jones [7] and Kiguradze [8].

Conclusion:

In a conclusion, we established some oscillation theorems, which guarantee that all solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations are oscillatory. An illustrative example of the obtained result was given



References:

- [1] L. Adamets and A. Lomtatidze, Oscillation conditions for a third order linear equation, *Differ. Uran.* 37(6), 723-729, 861(2001). [Russian]. Translation in *Differ. Equ.* 37(6) (2001).
- [2] L. Erbe, Existence of oscillatory solutions and asymptotic behavior for a class of a third order linear differential equations, *Pacific J. Math.*, 64(1976), 369-385.
- [3] L. Erbe, Oscillation, nonoscillation and asymptotic behavior for third order nonlinear differential equations, *Ann. Math. Pura. Appl.*, 110(1976), 373-393.
- [4] G. A. Grigorian, Kamenev type conditions for oscillation of third order linear ordinary differential equations, arXiv:2301.09975v1 [math.CA] 23 Jan (2023).
- [5] M. Hanan, Oscillation criteria for a third order linear differential equations, *Pacific J. Math.*, 11(1961), 919-944.
- [6] J. W. Heidel, Qualitative behavior of solutions of a third order nonlinear differential equation, *Pacific J. Math.*, 27(1968), 507-526.
- [7] G. D. Jones, An asymptotic property of solution of $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, *Pacific J. Math.*, 48(1973), 135-138.
- [8] I. T. Kiguradze, "An oscillation criterion for a class of ordinary differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 28, no.2(1992), 207-219.
- [9] W.J. Kim, Oscillatory properties of linear third order differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26(1976), 286-293.
- [10] A. C. Lazer, The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, *Pacific J. Math.*, 17(1966), 435-466.
- [11] Moussadek Remili, Nonoscillatory properties of nonlinear differential equations of third order, *Int. Journal of Math. Analysis*, vol. 1, , no. 26(2007), 1291-1302.
- [12] A. Tiryaki and S. Yaman, Asymptotic behavior of a class of nonlinear functional differential equations of third order, *Appl. Math. Lett.*, 14(2001), 327-332.



الفهرس

الصفحة	اسم الباحث	عنوان البحث	رت
1-10	Manal Mohammed bilkour	An optimal fuzzy zero point method for solving fuzzy transportation problem	1
11-24	Mohamed Bashir M. Ismail	Assessing the Adaptability of Students and Teachers in the Faculty of Arts at Alasmarya Islamic University to the Sudden Transition to Online Teaching and Learning Processes during the COVID- 19 Pandemic	2
25-34	Dawi Muftah Ageel	Environmental study for Cyanobacteria Blooms using Envisat data at the western coastal of Libya	3
35-53	Nuria Mohamed Hider	Possible solutions to ensure data protection in cloud computing to avoid security problems	4
54-60	Gharsa Ali Elmarash Najla Mokhtar	A printed book or an e-book? Student Preferences & Reasons	5
61-75	هدية سليمان هويدي نادية عطية القدار دعاء عبد الباسط باكير	التشهير الإلكتروني عبر مواقع التواصل الاجتماعي من وجهة نظر طلبة كلية طب الأسنان بمدينة زليتن	6
76-89	Hamza A. Juma Saif Allah M. Abgenah Mustafa Almahdi Algaet Munayr Mohammed Amir	Designing an Autonomous Embedded System for Temperature Monitoring and Warning in Medical Warehouses	7
90-101	Salem Msaoud Adrugi Tareg Abdusalam Elawaj Milad Mohamed Alhwat	The effect of using electronic mind maps in learning visual programming through e-learning platforms An experimental study of computer departments students at Elmergib University	8
102-110	Suad Mohamed Ramadan Zainab Ahmed Dali Ahlam Mohammad Aljarray Zenoba Saleh Shubar	Performance analysis of different anode materials of double chamber Microbial Fuel Cell technology using different types of wastewater	9
111-116	Faiza Farag Aljaray Saad Belaid Ghidhan	Evaluation of Hardness for Electroless Ni-P Coatings	10
117-128	Saleh Meftah Albouri Hadya S Hawedi Mansur Ali Jaba	Using Smartphone in Education: How Smartphone has impacted in Education, A Review Paper	11
129-139	Ibrahim O, Sabri	The Concept of Illegal Immigration and Its Causes in North Africa Region	12
140-151	A.S. Deeb I.A.S. Gjam	Solution of a problem of linear plane elasticity in region between a circular boundary with slot by boundary integrals	13



152-173	Musbah Ramadan Elkut	Transforming TESOL Pedagogy: Navigation Emerging Technology and Innovative Process	14
174-192	سالم علي سالم شخطور	آراء أبي محمد القيسي في خزانة الأدب "دراسة وتحليل"	15
193-217	نورية صالح إفريج	اعتراضات النحاة على حجية الشواهد في مسألة إعادة حرف الجر مع حتى العاطفة	16
218-238	نجاه صالح اليسير	الازدواجية اللغوية وأثرها في تعليم اللغة العربية الصفوف الأولى من المرحلة الابتدائية (أنموذجاً)	17
239-256	محمود محمد رحومة الهوش	الرضا الوظيفي وأثره على الاداء المهني لدى معلمي ومعلمات التربية البدنية ببلدية العجيلات	18
257-272	إبراهيم رمضان هدية	السرد الروائي عند إبراهيم الكوني في رواية الدنيا أيام ثلاثة	19
273-279	ابراهيم علي احمدودة ابراهيم علي ارحومة	التحليل الاستراتيجي لشركة الخطوط الجوية الليبية دراسة تطبيقية على الشركة باستخدام النماذج	20
280-294	Ismail F. Shushan Emad Eldin A. Dagdag Salah Eldin M. Elgarmadi	Petrography of Abushyba Formation columnar-jointed sandstones (Triassic-Jurassic) from Jabal Nafusa- Gharian, NW-Libya	21
295-307	Samera Albghil	Multimodal discourse analysis of variations in Islamic dress code in Bo-Kaap, Cape Town	22
308-317	عبداللطيف بشير المكي الديب رجب فرج سالم اقنيير	(استخدام نظم المعلومات الجغرافية والاستشعار عن بعد في تقدير النمو العمراني وأثره على البيئة المحلية بمنطقة سوق الخميس - الخمس / ليبيا)	23
318-331	حنان عبد السلام سليم عائشة حسن حويل	تطوير الخدمات العقارية باستخدام تقنية المعلومات (تطبيق أندرويد للخدمات العقارية أنموذجاً)	24
332-338	Mahmoud Mohamed Howas	Hepatoprotective Potential of Propolis on Carbontetrachloride-Induced Hepatic Damages in Rats	25
339-352	نورية محمد النائب الشريف	البناء العشوائي في مدينة الخمس (مفهومه - أسبابه - تأثيره على المخطط)	26
353-371	إسماعيل حامد الشعاب معمر فرج الطاهر سالم العامري	اختلاف القراء السبعة في البناء للفاعل وغير الفاعل وأثره في توجيه المعنى "نماذج مختارة"	27
372-376	عبد السلام صالح أبوسديل عطية رمضان الكيلاني	دراسة على مدى انتشار Gnathia sp. في بعض الأسماك البحرية المصطادة من شواطئ الخمس- ليبيا	28
377-392	الصغير محمد المجري	(بيان فعل الخير إذا دخل مكة من حج عن الغير) للملا علي القاري المتوفي سنة 1014هـ دراسة وتحقيق	29
393-421	نجيب منصور ساسي	فضل المواهب في شرح عيون المذاهب لعبد الرؤوف الأنطاكي (1009هـ) (الاستنجاة ونواقض الوضوء من كتاب الطهارة) دراسة وتحقيقا	30
422-439	حنان ميلاد عطية	برنامج ارشادي معرفي سلوكي في خفض مستوى الوحدة النفسية لأبناء النازحين الليبيين	31
440-457	Hanan A. Algrbaa,	Speaker recognition from speech using Gaussian mixture model (GMM) and (MFCC)	32
458-467	هشام علي مرعي	علاقة المنطق بالعلوم الشرعية عند الغزالي	33



468-476	خالد الهادي الفيتوري زينب أحمد زوليه	الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الملزمة باستخدام ب-سبلين التكعيبية	34
478-500	خميس ميلاد الدزيري	تأثير نظم معلومات التسويقية على توزيع السلعة " دراسة تطبيقية على إدارة مصنع إسمنت المرقب "	35
501-517	منصور عمر سالم فرعون	إدارة الوقت في الإدارة المدرسية في ضوء مهامهم الإدارية	36
518-533	فائزة محمد الكوت	أراء العلامة الدماميني النحوية في باب الظروف في كتاب خزانة الأدب ولب لباب لسان العرب	37
534-547	محمد محمد مولود الأنصاري حمزة مسعود محمد مكاري	"فوائد الفرائد في الاستعارة " عبد الجواد بن إبراهيم بن شعيب الأنصاري (1073هـ)	38
548-559	عبدالرحمن بشير الصابري إبراهيم عبد الرحمن الصغير أبوبكر أحمد الصغير	حروف الجر بين التناوب والتضمن دراسة تطبيقية على آيات من القرآن الكريم "دراسة وصفية تحليلية"	39
560-565	Ayda Saad Elagili Abdualah Ibrahim Sultan	An Application of "Kushare Transform" to Partial Differential Equations	40
566-598	أمل إجمد إقميع فاطمة محمد ابوراس	الأداء الوظيفي للمعلم وأثره على العملية التربوية دراسة سوسولوجية على عينة من معلمين ومعلمات مرحلة التعليم الأساسي	41
599-623	خيري عبدالسلام كليب عبدالسلام بشير اشتوي طارق أبوفارس العجيلي محمد عبدالسلام الأسطي فتحية خليل طحيشات	مدى التزام المصارف التجارية بتطبيق مبادئ إدارة الجودة الشاملة (دراسة ميدانية على مصرف الجمهورية فرع المرقب)	42
624-633	Abdulrhman Iqneebir Khaled Muftah Elsherif	Determination of Some Physical and Chemical Parameters of Groundwater in Ashafyeen-Masallata Area	43
634-650	أحمد على معتوق الزائدي	أحكام الأهلية وعوارضها عند الإنسان	44
651-671	عمر مصطفى النعاس السيد مصطفى السنباطي	الثقة بالنفس وعلاقته بالتوجه نحو الحياة لدى طالبات كلية الآداب	45
672-700	فاطمة جمعة الناكوع	معايير جودة آليات التدريب الميداني	46
701-718	إيمان عمر بن سعد بثينة علي أبو حليقة عمر محمد بشينه وليد حسين الفقيه	أثر المخاطر المالية في الأداء المالي للمصارف التجارية الليبية للفترة من (2011-2017)	47
719-730	هدي الهادي عويطي	دور مداخل ادارة المعرفة في تحسين ادارة الموارد البشرية في المؤسسات الحديثة	48
731-739	Khaled Abdusalam B. A Eman Mohammed Alshadhli Tasnim Adel Betro Amera Lutfi Kara Mawada Almashloukh	Antimicrobial Activities of Methanol Extract of Peganum harmala Leaves and Seeds against Urinary Tract Infection Bacteria	49
740-750	فتحية زايد شنيبه نجاة بشير الصابري	الصور البيانية في سورة الواقعة	50



751-757	Afifa Milad Omeman	Phytochemical, Heavy Metals and Antimicrobial Study of the Leaves of Amaranthus viridis	51
758-765	أسماء جمعة القلعي	قواعد المنهج عند ديكرت	52
766-777	فرج مجد صالح الدريع	النفط والاقتصاد الليبي 1963م – 1969م	53
778-789	عمر عبدالسلام الصغير رضا القدافي الأسمر	تقويم دية القتل الخطأ بغير الأصل	54
790-804	أبو عجيبة رمضان عويلي أحمد عبد الجليل إبراهيم	مناقشة المسألة الأربعين من كتاب المسائل المشكلة للفارسي	55
805-823	فتحية أبو عجيبة جبران صالحة عمر الخرارزة	في منطقة سوق الخميس التلوث البيئي الناتج عن محطات الوقود (بحث مقدم للحصول على ترقية عضو هيئة تدريس)	56
824-856	هنية عبدالسلام البالوص	بعض المشكلات الضغط النفسي وعلاقتها بالصحة النفسية	57
857-871	احمد علي عزيز علي مفتاح بن عروس	تطبيقات البرمجة الخطية ونماذج صفوف الانتظار في مراقبة وتحسين الأداء دراسة إحصائية تطبيقية على القطاع الصحي بمدينة الخمس	58
872-879	Mona A. Sauf Fathi Shakurfow Sana Ali Soof Abdel-kareem El-Basheer	Isolation of Staphylococcus Aureus From Different Clinical Samples And Detects on Its Antibiotic Resistance	59
880-885	Wafa Mohamed Alabeid Omar Alamari Alshbaili	Combined Method of Wavelet Regression with Local Linear Quantile Regression in enhancing the performance of stock ending-prices in Financial Time Series	60
886-901	خالد مجد بالنور خالد أحمد قناو	حجم الدولة الليبية وأثره عليها طبيعياً وبشرياً	61
902-918	Amna Ali Almashrgy Hawa Faraj Al-Burrki Khadija Ali AlHebshi	EFL Instructors' and Students' Attitudes towards Using PowerPoint Presentation in EFL Classrooms	62
919-934	سالمة عبد العالی السيليني	اضطرابات الشخصية الحدية وعلاقتها بالجمود المعرفي	63
935-952	Samah Taleb	Common English Pronunciation Difficulties Encountered by Third Year Students at the Faculty of Education- English Department- Elmergib University	64
953-958	Hassan M. Krifa	A Study on Bacterial Contamination of Libyan Currency in Al-Khoms, Libya	65
959-964	Jamal Hassn Frjani	A New Application of Kushare Transform for Solving Systems of Volterra Integral Equations and Systems of Volterra Integro-differential Equations	66
965-978	Ismail Elforjani Shushan Saddik Bashir Kamyra Hitham A. Minas	Study of chemical and biological weathering effects on building stones of the Ancient City of Sabratha, NW-Libya	67
979-991	مجد عبد السلام دخيل	الآثار الاجتماعية والثقافية المصاحبة للتغير الاجتماعي في المجتمعات النامية	68



992-998	Ismael Abd-Elaziz Fatma Kahel	Molecularly imprinted polymer (poly-pyrrole) modified glassy carbon electrode on based electrochemical sensor for the Sensitive Detection of Pharmaceutical Drug Naproxen	69
999-1008	خالد رمضان الجربوع علي إبراهيم بن محسن صلاح الدين أبوغالية	علي الجمل وقصيدته (اليوم الأربعاء في رثاء النورس الكبير)	70
1009-1014	نادية مجد الدالي ايمان احمد اخميرة	Comparing Review between Wireless Communication Technologies	71
1015-1024	Khairi Alarbi Zaglom Foad Ashur Elbakay	The importance of Using Classroom Language in Teaching English language as a Foreign Language	72
1025-1042	حمزة بن ربيع لقرون	الأدلة المختلف فيها التي نُسب الاختصاص بها إلى مذهب مُعَيَّن (دراسة تحليلية مقارنة)	73
1043-1052	أسماء السنوسي لحيو	معدل انتشار بعض الأوليات المعوية الطفيلية في مدينة الخمس، ليبيا	74
1053-1067	برنية صالح إجمد صالح	استعمالات (ما) النافية في سورة البقرة	75
1068-1085	اسماعيل عبدالكريم اعطية	عوامل نجاح وفشل نظام المعلومات دراسة تطبيقية على شركة الأشغال العامة بني وليد	76
1086-1098	نجوى الغويلي	"الرعاية الاجتماعية والدعم الاجتماعي والتربية الإيجابية للطفل"	77
1099-1105	Seham Ibrahim abosoria Fatheia Masood Alsharif Abdussalam Ali Mousa Hamzah Ali Zagloum	The Error Correction in second language writing	78
1106-1128	ميسون خيرى عقيلة	أساليب المعاملة الوالدية وعلاقتها بالتحصيل الدراسي لدى عينة من طلبة كليات جامعة المرقب بمدينة (الخمس)	79
1129-1135	Majdi Ibrahim Alashhb Mohammed Alsunousi Salem Mustafa Aldeep	Quality of E-Learning Learning Based on Student Perception Al Asmarya University	80
1136-1150	Ekram Gebiril Khalil	The Importance of Corrective Feedback in leaning a Foreign Language	81
1151-1164	سكينه الهادي الحوات فوزي مجد الحوات سليمة رمضان الكوت	شكل العلاقات الاجتماعية في ظل انتشار الأوبئة والأمراض السارية (جائحة كوفيد 19 نموذجاً)	82
1165-1175	Salma Mohammad Abad	A comparative study of the effects of Rhazya stricta plant residue on Raphanus sativus plant at the age of 15 and 30 days	83
1176-1191	مجد عمر مجد الفقيه الشريف	توظيف الاعتزال عند الزمخشري وانتصاره له من خلال تفسيره	84
1192-1210	عبدالله احمد الفزاني علاء الدين مجد خليل المخ	مشكلات تطبيق التربية العملية من وجهة نظر الطلاب بكلية التربية بالجامعة الاسمرية بدولة ليبيا	85
1211-1222	M. J. Saad N. Kumaresan Kuru Ratnavelu	Integral Averaging Techniques for Oscillation Nonlinear Differential Equations of Third Order	86
1223	الفهرس		