استخدام المتسلسلات في حل مسائل القيم الحدية (منظومة شتروملوفيل)

أ. ذكريات عبد المولى سالم العيساوي

قسم الرياضيات/كلية التربية/ جامعة الزيتونة.

www.dkabdo224@Gmail.com

Abstract:

In general, sturm-Lioville system is obtained by applying the separation of variables to boundary or elementary value problems of second order, since the sturm-Lioville system contains a homogeneous differential equation of the second order with two terms for each $a < x < b$.Therefore, the main objective of this paper is to solve the sutrm-Liovill system using power series when $x = x_0$ is a fair point of the system.

By applying the boundary conditional, general solution of the stutrm-liovill system is achieved and it is found that each eigenvalue $\lambda_n$corresponds to an eigenfunction $y_n(x)$and these functions are linearly independent and orthogonal solutions within the period $a < x < b$.

الكلمات المفتاحية : منظومة شتروملوفيل – الشرطين الحديين - الدوال الذاتية – القيمة الذاتية

المقدمة:Introduction

عند اجراء فصل المتغيرات على مسائل القيم الحدية الخطية نتحصل على مسألة قيم حدية أو (معادلة تفاضلية عادية). $y(x)$ لكل $y'' + \lambda^2 y = 0 \rightarrow (1)$

فعندما يكون لمسألة القيم الحدية شرطين حديينمن شروط dirichle tفإننا نتحصل على المنظومة

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \qquad 0 < x < l \qquad (2)$$
$$y(0) = 0$$
$$y(l) = 0$$

وعندما يكون لمسألة القيم الحدية شرطين حديين من شروط Naumann فأننا نتحصل على المنظومة

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \qquad 0 < x < l \qquad (3)$$
$$y'(0) = 0$$
$$y'(l) = 0$$

وهي ما تعرف بمنظومة Sturm-Liouvilleوهي معادلة كلاسيكية (معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية).

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + [\lambda p(x) - q(x)]y = 0$$

سميت هكذا نسبة إلى عالمي الرياضيات الفرنسيين جاك شارل فرانسوا ستروم وجوزيف ليوفيل.

اى أن هذا النظام ينشأ من مسائل القيم الحدية التي تحتوي على شروط dirichlet و nauman و studary robin و كذلك مسائل القيم الحدية للحدود القطبية .[4].

ففي المنظومة (2) عندما تكون $\lambda < 0$ وتطبيق الشروط الحدية نتحصل على الحل العام للمنظومة

$$y(x) = 0 \qquad (4)$$

وعندما $\lambda = 0$ وكذلك تطبيق الشروط الحدية نتحصل على الحل العام للمنظومة (2)

$$y(x) = 0 \qquad (5)$$

وهو حل شاذ لمنظومة شتروملوفيل.

أي يجب ان تكون القيم الذاتية من منظومة شتورملوفيل موجبة فعند $\lambda > 0$ وتطبيق الشروط الحدية مرة أخرى نتحصل على الحل العام للمنظومة (2)

$$y(x) = b\sin\sqrt{\lambda}\, x \qquad (6$$

n = 0,1,2,......

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}$$

وهي دوال ذاتية

$$y_n = b\sin\frac{\pi(2n-1)}{2l}x$$

. [1]

وهذه الورقة أقترح حل منظومة شترومليوفيل باستخدام (متسلسلات القوى)عندما تكون نقطة عادية لمنظومةsturm-lioville،والنتيجة هنابتطبيق الشروط الحدية تحصلنا على الحل العام للمنظومة.بحيث لكل قيمة ذاتية λ_n تناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$ وهذه الدوال هي حلول مستقلة خطيا ومتعامدة لكل $a < x < b$.

أهم التعريفات :

طريقة فروبنيوس :

نعرف متسلسلة قوى حول $x = x_0$

$$(7)\ f(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$$

نفرض أن المعادلة الاتية:

$$S_0(x)y'' + S_1(x)y' + S_2(x)y = 0$$

حيث أن كل من S_0،S_1،S_2 دوال تحليلية في x أي يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسلة قوى في x .نقول $x = x_0$ نقطة عادية ordinary point إذا $S_0(x) \neq 0$.

تعريف:إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية التالية

$$S_0(x)y'' + S_1(x)y' + S_2(x)y = 0$$

وكانت الدوال $S_1(x)$ $S_2(x)$ ،.$S_0(x)$ هي دوال تحليلية في x أي يمكن التعبير عنها بمتسلسلة قوى في x . فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه يمكن وضعه على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_m (x-x_0)^m = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x) \qquad (8)$$

حيث C_0، C_1 ثوابت اختيارية وأن y_1، y_2 حلول مستقلة خطياً عندما x [3]، وبشكل عام منظومة شتروم لوفيل تحتوي على معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية بالإضافة إلى شرطين حديين متجانسين لدالة المجهولة $y(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+[\lambda p(x)-q(x)]y=0 \quad (9)$$

$$l_1 y'(a)+h_1 y'(a)=0 \quad (9,a)$$

$$l_2 y'(b)+h_2 y'(b)=0 \quad (9,b)$$

حيث أن p،r،q دوال حقيقية p لها مشتقة متصلة وكذلك r،q دالتان متصلتان $p>0$،$r>0$ لكل قيم x على الفترة $\lambda, a\le x\le b$ بارمتر لا يعتمد على x.وان l_1،l_2،h_1،h_2 ثوابت حقيقية مستقلة عن البارمتر λ بحيث l_1،l_2 لا يتلاشيان معاً وكذلك h_1،h_2 لا يتلاشيان معاً.تسمى هذه المسألة بمسألة شتروم لوفيل.[2,1]

والآن ندرس الحل لمنظومة شتروملوفيل، لأي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية عندما تكون $R(x)>0$ لكل $a<x<b$.

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2}+S(x)\frac{dy}{dx}+[\lambda P(x)-q(x)]y=0 \quad (10)$$

بما أن $R(x)>0$ يمكن كتابة المعادلة بالشكل

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{s(x)}{R(x)}\frac{dy}{dx}+\left[\lambda\frac{P(x)}{R(x)}-\frac{Q(x)}{R(x)}\right]y=0 \quad (11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+B(x)\frac{dy}{dx}+[\lambda U(x)-V(x)]y=0 \quad (12)$$

بضرب الدالة $e^{\int B(x)dx}$ في كل حد

$$e^{\int B(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2}+e^{\int B(x)dx}B(x)\frac{dy}{dx}+\left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx}V(x)e^{\int B(x)dx}\right]y=0$$

(13)

ولكن

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right]=(e^{\int B(x)dx}\frac{d^2y}{dx^2}+e^{\int B(x)dx}B(x)\frac{dy}{dx} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx}-V(x)e^{\int B(x)dx}\right]y=0 \quad (15)$$

بوضع $V(x)=0$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int B(x)dx}\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda U(x)e^{\int B(x)dx}\right]y=0$$

بوضع

$$,r(x)=\ e^{\int B(x)dx}\qquad,\qquad p(x)=U(x)e^{\int B(x)dx}$$

$$a<x<b \text{ لكل } r(x)>0\quad,\quad r'(x)>0$$

وبذلك نتحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda p(x)]y=0\qquad ,a<x<b \tag{17}$$

الآن ، إذا كانت $x=x_0$ نقطة عادية للمعادلة أعلاه بوضع الحل على الصورة :

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\,(x-x_0)^m \tag{18}$$

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty}mC_m\,(x-x_0)^{m-1} \tag{19}$$

$$y''=\sum_{m=0}^{\infty}m\,(m-1)C_m\,(x-x_0)^{m-2} \tag{20}$$

والتعويض في المعادلة (17) لنحصل على الحل العام .

مثال: لنفرض أن مسألة القيمة الحدية :

$$\frac{d^2y}{dx^{\ 2}}+\lambda y=0\qquad 0<x<l \tag{21}$$

$$y(0)=0$$

$$y'(l)=0$$

حيث p=1 ,q=0 ,r=1 والشروط الحدية هي حالة خاصة من الشروط (9,a) و (9,b)، إذا $x=0$ هي نقطة عادية.

فإن الحل يمكن وضعه على الصورة

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\,(x-0)^m=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\,x^m$$

$$y'=\sum_{m=1}^{\infty}m\,C_m\,x^{m-1}$$

$$y''=\sum_{m=2}^{\infty}m\,(m-1)C_m\,x^{m-2}$$

ثم التعويض عن y,y'' في المعادلة (21) لنحصل على

$$\sum_{m=2}^{\infty}m\,(m-1)C_m\,x^{m-2}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}C_m\,x^m=0$$

يمكن استبدال $\sum_{m=2}^{\infty}m\,(m-1)C_m\,x^{m-2}$ بـ $\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)\,(m+1)C_{m+2}\,x^m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)\,(m+1)C_{m+2}\,x^m+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}C_m\,x^m=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2)(m+1)C_{m+2}+\lambda C_m]x^m=0\qquad x^m\neq 0$$

$$(m+2)(m+1)s_{m+2}+\lambda C_m=0\qquad ,\ x^m\neq 0$$

وبذلك نتحصل على الصيغة التكرارية

$$C_{m+2} = \frac{-\lambda C_m}{(m+2)(m+1)} \quad , \qquad (m= 0,1,\dots\dots)$$

$$C_2 = \frac{-\lambda C_0}{2 \times 1} = -\frac{\lambda C_0}{2!}$$

$$C_3 = \frac{-\lambda C_1}{3 \times 2} = -\frac{\lambda C_1}{3!}$$

$$C_4 = \frac{-\lambda C_2}{4 \times 3} = -\lambda \frac{\frac{(-\lambda C_0)}{2!}}{4 \times 3} = \frac{\lambda^2 C_0}{4!}$$

$$C_5 = \frac{-\lambda C_3}{5 \times 4} = -\lambda \frac{\frac{(-\lambda C_1)}{3!}}{5 \times 4} = \frac{\lambda^2 C_1}{5!}$$

$$C_6 = \frac{-\lambda C_3}{6 \times 5} = -\lambda \frac{\frac{(\lambda^2 C_0)}{4!}}{6 \times 5} = \frac{\lambda^3 C_0}{6!}$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \cdots.$$

$$= C_0 + C_1 x + \left(\frac{-\lambda C_0}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{-\lambda C_1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{\lambda^2 C_0}{4!}\right) x^4 + \left(\frac{\lambda^2 C_1}{5!}\right) x^5 + \left(\frac{\lambda^3 C_0}{6!}\right) x^6 + \cdots$$

$$= C_0 - \frac{\lambda C_0}{2!} x^2 + \frac{\lambda^2 C_0}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{2n!} C_0 x^{2n} + C_1 x - \frac{\lambda C_1}{3!} x^3 + \frac{\lambda^2 C_1}{5!} x^5 + \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{(2n!)} x^{(2n-1)}$$

$$= C_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 + \frac{\lambda^2}{4!} x^4 + \cdots \quad + \frac{(-\lambda)^n}{2n!} x^{2n}\right] + C_1 [x - \frac{\lambda}{3!} x^3 + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-\lambda)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}].$$

$$y(x) = C_0[\cos\lambda x] + C_1[\sin\lambda x] \qquad (22)$$

وهي حلول مستقلة خطيا وتحليلية عند $x_0 = 0$

من الشروط الحدية $y(0) = 0$

$$0 = C_0 \cos\lambda(0) + C_1 \sin\lambda(0)$$

$$0 = C_0 \cos\lambda(0) \Longrightarrow C_0 = 0$$

من المعادلة (18) نجد أن

$$y'(x) = -\lambda C_0 \sin\lambda x + C_1 \lambda \cos\lambda x$$

ومن الشرط $y'(l) = 0$ نتحصل على

$$0 = y'(l) = -\lambda C_0 \sin\lambda l + C_1 \lambda \cos\lambda l$$
$$0 = C_1 \lambda \cos\lambda l \Longrightarrow \cos\lambda l = 0$$

أي أن

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{\pi}{2l}$$

وعليه فأن

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

ويكون الحل العام للمعادلة

$$y(x) = C_1 \sin\frac{(2n-1)}{2l}x$$

مثال: نعتبر مسألة القيم الحدية

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad -l < x < l \qquad (19)$$

$$y(-l) = y(l)$$
$$y'(-l) = y'(l)$$

الحل: حيث أن $x = 0$ نقطة عادية

نفرض أن الحل

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$
$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m C_m x^{m-1}$$
$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

بالتعويض في المعادلة (19) نتحصل على:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2} + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

وبمساواة الحدود فيمكن استبدال

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{m+2} x^m$$ بـ $$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{m+2} x^m + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{m+2} + \lambda C_m x^m = 0, \qquad x^m \neq 0$$
$$(m+2)(m+1) C_{m+2} + \lambda C_m = 0$$

$$c_{m+2} = -\frac{\lambda C_m}{(m+2)(m+1)} \quad ; \qquad m \geq 0$$

$$C_2 = \frac{-\lambda C_0}{2 \times 1} = \frac{-\lambda C_0}{2!}$$

$$C_3 = \frac{-\lambda C_1}{3 \times 2} = \frac{-\lambda C_1}{3!}$$

$$C_4 = \frac{-\lambda C_2}{4 \times 3} = \frac{\frac{-\lambda(-\lambda C_0)}{2!}}{4 \times 3} = \frac{\lambda^2 C^0}{4!}$$

$$C_5 = \frac{-\lambda C_3}{5 \times 4} = \frac{\frac{-\lambda(-\lambda C_0)}{3!}}{5 \times 4} = \frac{\lambda^2 C_1}{5!}$$

$$C_6 = \frac{-\lambda^3 C_0}{6!}$$

تم التعويض عن قيمة C_i ، (i=2,3,.....)

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1 x + \left(\frac{-\lambda C_0}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{-\lambda C_1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{-\lambda^2 C_0}{4!}\right) x^4 + \frac{-\lambda^2 C_1}{5!} x^5 + \cdots$$

$$= C_0 + \left(\frac{-\lambda C_0}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{-\lambda^2 C_0}{4!}\right) x^4 + \cdots + \frac{(-\lambda)^n x^{2n}}{2n!} + C_1 \quad x$$

$$+ \left(\frac{-\lambda C \quad {}_1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{\lambda^2 C_1}{5!}\right) x^5 + \cdots + \frac{(-\lambda)^n x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}$$

$$y(x) = C_0 \cos\lambda x + C_1 \sin\lambda x$$

من الشروط الحدية نجد ان

$$y(-l) = y(l)$$

$$C_0 \cos\lambda l + C_1 \sin\lambda l = C_0 \cos\lambda(-l) + C_1 \sin\lambda(-l)$$

$$C_0 \cos\lambda l + C_1 \sin\lambda l = C_0 \cos\lambda l - C_1 \sin\lambda l$$

$$2C_1 \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0$$

وعليه فإن

$$\lambda = \frac{\pi}{l} ; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

من الشرط

$$y'(-l) = y'(l)$$

حيث:

$$y'(l) = -\lambda C_0 \sin\lambda l + \lambda C_1 \cos\lambda l$$

$$y'(-l) = \lambda C_0 \sin\lambda l + \lambda C_1 \cos\lambda l$$

$$\lambda C_0 \sin\lambda l + \lambda C_1 \cos\lambda l = -\lambda C_0 \sin\lambda l + \lambda C_1 \cos\lambda l$$

$$2\lambda C_0 \sin\lambda l = 0$$

$$\sin\lambda l = 0$$

$$\lambda l = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\pi}{l}$$

وهي قيمة ذاتية:

وعليه فأن $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$

ومنها نحصل على الحل العام

$$y(x) = C_0 \cos\frac{n\pi}{l}x + C_1 \sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث يناظر القيمة الذاتية λ_n دوال ذاتية يرمز لها ($y_n(x) = y(\lambda_n, x$.

نظرية: جميع القيم الذاتية لمنظومة شتروم لوفيل حقيقة وتكون جميع الدوال الذاتية المتناظرة للقيم الحقيقية متعامدة على الفترة [a ،b] .

من المثال السابق يتضمن أن الدوال الذاتية

$$y(x) = C_0 \cos\frac{n\pi}{l}x + C_1 \sin\frac{n\pi}{l}x$$

تكون متعامدة على الفترة $-l \le x \le l$

$$\int_{-l}^{l} 1(\ \cos\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{n\pi}{l}x)dx = 0$$

أي أن مجموعة الدوال$\{1،\cos\frac{n\pi}{l}x، \sin\frac{n\pi}{l}x\ \}$متعامدة [1].

الخاتمة:

من خلال التحليل الرياضي لمنظومة شتروم لوفيل والتطبيق الشرطين للحديين تحصلنا على نتائج مرضية تحققت فيها هذه الشروط عندما تكون x نقطة عادية للمنظومة وان λ_n تناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$، وهذه الدوال هي حلول مستقلة خطياً ومتعامدة لكل $a < x < b$ ، ونستنتج اذا كانت $y_n(x)$ دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n وكانت C≠0 ثابت فإن $Cy_n(x)$ كذلك دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n .

في منظومة شتروم لوفيل لا يمكن أن نجد حلين مستقلين خطيا" مناظران لقيمة ذاتية واحدة، أي لا يمكن أن تكون دالتان ذاتيتان خطيتان مستقلتان مناظرة لنفس القيمة الذاتية.

المراجع:

1- Donald w. trim – Applied partial differential Equation-Boston pws publishing Company. 1990

2- Godokington E. A. and N Levinson J heory of ordinary differential Equation New York: Megt w – hill, 1995

3- د. الزوام أحمد دله واخرون المعادلات التفاضلية العادية ، 1997 ، عمان دار ارام.

4- معلومات عن نظرية شتروملوفيل على موقع mathworld–nolfram.com