دراسة مسألة من النمط الثاني

"تعيين الحل العام لمسألة حدية غير متجانسة بشرطين ابتدائيين غير متجانسين وشرط حدي غير متجانس"

أ.د عبير مصطفى مفتاح الهصيك
جامعة المرقب/ كلية العلوم – قسم الرياضيات
abeer.alhaseek@gmail.com

الملخص:

ندرس في هذا البحث حل المسألة الحدية التالية:-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty$$

بالشرطين الابتدائيين: $u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$

و الشرط الحدي: $u_x(0,t) = \mu(t) \quad , \; t > 0$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), f \in C^1, \varphi'(0) = \psi'(0) = f'(0,t) = 0$$

$$\mu \in C^1(t \geq 0), \mu(0) = \mu'(0) = 0$$

و يتم تعيين الحل للمسألة أعلاه في شكل دالة في متغيرين (x,t) وهي تتمثل في مجموع الحلين $u_1(x,t), u_2(x,t)$

***وذلك* بالاستعانة:**

بالحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرط الحدي المتجانس والمسألة الحدية المتجانسة بالشرط الحدي غير المتجانس، والاستكمال الزوجي للدوال.

المختصرات:

المسألة الحدية (متجانسة- غير متجانسة) - شرطين ابتدائيين- شرط حدي- الاستكمال.

دراسة مسألة من النمط الثاني

"تعيين الحل العام لمسألة حدية غير متجانسة بشرطين ابتدائيين غير متجانسين وشرط حدي غير متجانس"

المقدمة:-

ندرس حل المسألة الحدية التالية:-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty \qquad (*)$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u_x(0,t) = \mu(t) \quad , \ t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \ge 0), \psi \in C^1(x \ge 0), f \in C^1, \varphi'(0) = \psi'(0) = f'(0,t) = 0$$

$$\mu \in C^1(t \ge 0), \mu(0) = \mu'(0) = 0$$

الحل لــ $u(x,t)$ يكون بحاصل الجمع للحلين كالتالي :-

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

حيث كل من $u_1(x,t), u_2(x,t)$ معرفة بالشكل التالي على التتالي :

$$u_1(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t), 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي :

$$u_x(0,t) = 0 \quad , \ t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), f \in C^1, \varphi'(0) = \psi'(0) = f'(0,t) = 0$$

$$u_2(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

و الشرط الحدي:

$$u_x(0,t) = \mu(t) \quad , \; t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), \mu \in C^1(t \geq 0), \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

$$\mu(0) = \mu'(0) = 0$$

فالحل لــ $u_1(x,t)$ وهو الحل للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين والشرط الحدي المتجانس كالتالي:

ندرس الدوال $\Phi(x), \Psi(x), F(x,t)$ اللاتي تعتبر استكمالا زوجيا للدوال $\varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ اللاتي تدخل في الشرطين الابتدائيين:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x>0 \\ \varphi(-x), x<0 \end{cases} \quad , \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x>0 \\ \psi(-x), x<0 \end{cases} \quad , \quad F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), x>0 \\ f(-x,t), x<0 \end{cases}$$

الدالة التالية :-

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

(**)

معرفة لجميع قيم x و $t > 0$.

بدراسة الدالة الناتجة $u(x,t)$ فقط للقيم $x \geq 0, t \geq 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط المسألة المصاغة .

أو نناقش الحالتين :

عند : $t < \frac{x}{a}, x > 0$ وعند : $t > \frac{x}{a}, x > 0$

الحالة الأولى عند : $t < \frac{x}{a}, x > 0$

$$t < \frac{x}{a} \Rightarrow \ x + at > 0, x - at > 0 \quad , x + a(t-\tau) > 0, x - a(t-\tau) > 0$$

$$x + at > 0 \Rightarrow \Phi(x+at) = \varphi(x+at) \quad , \quad x - at > 0 \Rightarrow \Phi(x-at) = \varphi(x-at)$$

أما

$$\int_{x-at>0}^{x+at>0} \Psi(\alpha)d\alpha = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau)>0}^{x+a(t-\tau)>0} F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ, Ψ, F في $(**)$ نحصل على :-

$$u(x,t) = \frac{\varphi(\text{x+at}) + \varphi(\text{x-at})}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{0}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

$(***)$

الحالة الثانية عند : $t > \frac{x}{a}, x > 0$

$$t > \frac{x}{a}, x > 0 \quad , \ x + at > 0, x - at < 0 \ , x + a(t-\tau) > 0, x - a(t-\tau) < 0$$

$$x-at<0 \Rightarrow \Phi(x-at)=\varphi(-(x-at))=\varphi(at-x)$$

$$x+at>0 \Rightarrow \Phi(x+at)=\varphi(x+at)$$

أما

$$\int_{x-at<0}^{x+at>0} \Psi(\alpha)d\alpha = \int_0^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha)d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau)<0}^{x+a(t-\tau)>0} F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau = \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau + \int_0^{a(t-\tau)-x} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ,Ψ,F في (**) نحصل على:-

$$u(x,t)=\frac{\varphi(\text{x+at})+\varphi(\text{at-x})}{2}+\frac{1}{2a}[\int_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int_0^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t[\int_0^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha+\int_0^{a(t-\tau)-x}f(\alpha,\tau)d\alpha]d\tau \qquad (****)$$

من (***) و(****) نحصل على الحل لـ $u_1(x,t)$ وهو الحل للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين والشرط الحدي المتجانس:-

$$u_1(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}[\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int_0^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha] \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t[\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha+\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\alpha,\tau)d\alpha]d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0 \end{cases}$$

والحل لـــ $u_2(x,t)$ هو الحل للمسألة الحدية المتجانسة بالشرطين الابتدائيين المتجانسين والشرط الحدي $u_x(0,t)=\mu(t)$ غير المتجانس كالتالي:

من الواضح أنّ النظام الحدي يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a ممّا يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل:

$$u_2(x,t)=f(x-at)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u_2(x,t)=f'(x-at).(x-at)'_x=f'(x-at)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u_2(0,t)=f'(-at)=\mu(t)$$

بوضع $at=z$ نحصل على :

$$\Rightarrow f'(z)=\mu(-\frac{z}{a})$$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى z نحصل على :

$$\int_0^z f'(z)dz=\int_0^z \mu(-\frac{\eta}{a})d\eta$$

$$\Rightarrow f(z)\Big|_0^z=\int_0^z \mu(-\frac{\eta}{a})d\eta \qquad \Rightarrow f(z)-f(0)=\int_0^z \mu(-\frac{\eta}{a})d\eta$$

$$\Rightarrow f(z)=\int_0^z \mu(-\frac{\eta}{a})d\eta - f(0) \qquad \Rightarrow f(z)=\int_0^z \mu(-\frac{\eta}{a})d\eta$$

لأن : $f(0)=0$.

بوضع $-\frac{\eta}{a}=\tau \Leftarrow \eta=-a\tau \Leftarrow d\eta=-ad\tau$ نحصل على :

$$\Rightarrow f(z)=-a\int_0^{-\frac{z}{a}} \mu(\tau)d\tau \qquad \Rightarrow f(x-at)=-a\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\tau)d\tau$$

و منها :

$$u_2(x,t)=-a\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\tau)d\tau$$

إذاً الحل لــ $u_2(x,t)$ هو الحل للمسألة الحدية المتجانسة بالشرطين الابتدائيين المتجانسين والشرط الحدي غير المتجانس: −

غير أن هذه الدالة معرفة فقط في المنطقة $x-at\le 0$

$$u_2(x,t)=\begin{cases} 0, t<\frac{x}{a} \\ -a\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\tau)d\tau, t\ge\frac{x}{a} \end{cases}$$

ومجموع الدالتين $u_1(x,t), u_2(x,t)$ هو عبارة عن الحل العام لمسألة حدية غير متجانسة بشرطين ابتدائيين غير متجانسين وبشرط حدي غير متجانس كالتالي: −

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}-a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mu(\tau)d\tau+\dfrac{1}{2a}[\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int_0^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha] \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t[\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha+\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\alpha,\tau)d\alpha]d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0 \end{cases}$$

(*****)

مثال تطبيقي:

تعيين الحل العام للمسألة التالية:−

$$u_{tt}=4u_{xx}+16t^2 \quad ; \; 0<x<\infty, t>0$$

$$u(x,0)=\frac{1}{6}x \qquad ; \qquad u_t(x,0)=2\sin x$$

$$u_x(0,t)=4t^4$$

من الواضح أنّ المسألة المصاغة هي مسألة من النمط الثاني وهى مسألة حدية غير متجانسة بشرطين ابتدائيين غير متجانسين وشرط حدي غير متجانس.

بالمقارنة بالعلاقة (*) نحصل على:−

$$a=2; f(x,t)=4t^2, \varphi(x)=\frac{1}{6}x, \psi(x)=2\sin x, \mu(t)=4t^4$$

بتطبيق الحل العام للدالة (*****) نحصل على:-

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}-a\displaystyle\int_{0}^{t-\frac{x}{a}}\mu(\tau)d\tau+\dfrac{1}{2a}[\int_{0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int_{0}^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha] \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{t}[\int_{0}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha+\int_{0}^{a(t-\tau)-x}f(\alpha,\tau)d\alpha]d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{6}(x+2t)+\frac{1}{6}(x-2t)}{2}+\dfrac{1}{2.2}\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t}2\sin\alpha d\alpha+ \\ +\dfrac{1}{2.2}\displaystyle\int_{0}^{t}\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}4\tau^2 d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{2}, x>0 \\ \dfrac{\frac{1}{6}(x+2t)+\frac{1}{6}(2t-x)}{2}-2\displaystyle\int_{0}^{t-\frac{x}{2}}4\tau^4 d\tau+\dfrac{1}{2.2}[\int_{0}^{x+2t}2\sin\alpha d\alpha+\int_{0}^{2t-x}2\sin\alpha d\alpha] \\ +\dfrac{1}{2.2}\displaystyle\int_{0}^{t}[\int_{0}^{x+2(t-\tau)}4\tau^2 d\alpha+\int_{0}^{2(t-\tau)-x}4\tau^2 d\alpha]d\tau, t>\dfrac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{2}[\cos(x+2t)-\cos(x-2t)] \\ +\displaystyle\int_{0}^{t}\tau^2[(x+2(t-\tau))-(x-2(t-\tau))]d\tau, t<\dfrac{x}{2}, x>0 \\ \dfrac{t}{3}-\dfrac{8}{5}[(t-\dfrac{x}{2})^5]-\dfrac{1}{2}[\cos(x+2t)+\cos(2t-x)-2\cos 0] \\ +\displaystyle\int_{0}^{t}\tau^2[(x+2(t-\tau))+(2(t-\tau)-x)]d\tau, t>\dfrac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\sin x.\sin 2t \\ \quad +4\displaystyle\int_0^t [t\tau^2-\tau^3]d\tau, t<\dfrac{x}{2}, x>0 \\ \dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{20}[(2t-x)^5]-(\cos x.\cos 2t-1) \\ \quad +4\displaystyle\int_0^t [t\tau^2-\tau^3]d\tau, t>\dfrac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\sin x.\sin 2t+\dfrac{1}{3}t^4, t<\dfrac{x}{2}, x>0 \\ \dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{20}[(2t-x)^5]+(1-\cos x.\cos 2t)+\dfrac{1}{3}t^4, t>\dfrac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

المـــــراجـع

1- أ. تيخونوف وأ. سامارسكي، معادلات الفيزياء الرياضية الجزء(1 ،2)، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفييتي- موسكو، 1984، ترجمة من الروسية: د. القرماني أحمد.

2- د. ديفد. ل. باورز، مسائل القيم الحدية، الطبعة الأولى، دار إنتربرينت ليميتد للطباعة والنشر، مالطا، 1985، ترجمة: د. القرماني أحمد - د. عوين علي.

3- ن. كشليكوف وأ. قلينيف و م. سميرنوف، معادلات الفيزياء الرياضية الجزئية، 1970.

4- د.قاسيموف قربان - رازيف اعتيبار - شاحوت عياد، معادلات الفيزياء الرياضية، الطبعة الأولى، دار الخمس.

5- دله الزوام، المعادلات التفاضلية الجزئية للأقسام العلمية والهندسية، جامعة الفاتح- طرابلس، ليبيا، 1998م.

6- هب الريح أحمد، أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية الجزء(1 ،2)، دار ومكتبة الشعب- مصراته، ليبيا 2004م.

7- جون أ. تيرني، المعادلات التفاضلية، ترجمة: د. القرمانى أحمد – د. سالم الفيتوري، منشورات جامعة الفاتح ســـ1989 ـنة.

8- أ.د- شكر الله إميل ، المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس، دار النشر والطباعة موسسة بيتر للطباعة والتوريدات، الطبعة الثانية سـ 2002نة.

9- رينشارد برونسون، سلسلة المسائل المحلولة شوم في المعادلات التفاضلية، ترجمة: د- فوق العادة فايز.

10- موارى ر. شبيجل، سلسلة ملخصات شوم في الدوال المركبة والرياضيات المتقدمة، ترجمة: د. العويضى حسن

11-E.A.Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equation Company New York Toronto / London - 1955.

12-W.T.Donald, Applied partial Differential Equation , The university of Manitoba PWS – Publishing Company – 1990 .

13- A.C.King , J.Billingham & S.R.Otto, Differential Equations First Edition – 2003, Print in the United Kingdom the university Press, Cambridge.

14-Deang . Duffy, Green's Functions With Applications, Chapman & Hall / CRC – 2001.

15- M . D . Raisinghania S . Chand & Companyltd, Advanced Differential Equations, Newddlhi -2004.

16- George F . Simmons Mc Graw – Hill , Inc, Differential Equations With Applications & Historical Notes Second Eddition .