ISSN : 2706-9087

جامعة المرقب
كلية الآداب والعلوم قصر الأخيار
ELMERGIB UNIVERSITY
FACULTY OF ART & SCIENCE KASR KHIAR - LIBYA

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

مجلة دورية نصف سنوية محكمة

في هذا العدد...

العدد
8
ISSUE

ديسمبر 2019
DESEMBER 2019

kshj@elmergib.edu.ly http://khsj.elmergib.edu.ly +21892516762

المشرف العام

أ.النوري سليمان القماطي

هيئة التحرير

د. سالم محمد المعلول رئيساً

د. إمحمد عطية يحيى مدير التحرير

أ. علي محمد نجاح سكرتير التحرير

اللجنة الاستشارية

أ.د. علي الحوات — أ.د. أحمد ظافر محسن

أ.د. عبدالمجيد خليفة النجار — أ.د. العربي علي القماطي

د.عبدالرحمن محمد إرحومة — د.الصادق المبروك الصادق

د.أبوراوي محمد الجرنازي — د.حميدة ميلاد أبورونية

المراجعة اللغوية

د. أبو عجيلة رمضان عويلي — أ. يوسف دخيل علي

أ. عصام علي عواج — أ. عبدالرؤوف ميلاد عبدالجواد

الإخراج والإشراف الفني

أ.أحمد عياد المنتصري

©

لا يسمح بإعادة إصدار محتويات المجلة أو نقلها أو نسخها بأي شكل من الأشكال دون موافقة رئيس التحرير

إن كافة البحوث تعبر عن وجهة نظر أصحابها، و لا تعبر بالضرورة عن رأي المجلة أو الكلية

جميع الحقوق محفوظة

قواعد النشر

حرصاً من هيئة التحرير على استخدام الأسلوب العلمي في كتابة البحوث والدراسات المراد نشرها، ينبغي اتباع القواعد التالية :

الغلاف ينبغي أن يحتوى على العنوان واسم الباحث (الباحثين) ، والدرجة العلمية وجهة العمل ، والدولة ، والبريد الإلكتروني ، وسنة النشر .

المتن يشتمل على ملخص للبحث (عربي – إنجليزي) بعكس لغة البحث لا يتجاوز ورقة واحدة.

تخضع البحوث المقدمة للنشر للتحكيم العلمي ، ولهيئة التحرير أن تطلب من المؤلف بناء على اقتراح المحكمين بإجراء التعديلات المطلوبة على البحث قبل الموافقة على نشره .

ضوابط ومواصفات البحوث المقدمة للنشر:

1. أن يكون البحث أو الدراسة ضمن الموضوعات التي تختص بها المجلة .
2. ألاّ يكون البحث قد سبق نشره في إحدى المجلات أو مستلا من أطروحة علمية أو يكون الباحث قد تناوله بعنوان آخر في وسيلة نشر أخرى ويوثق ذلك بتعهد خطي بهذا الخصوص .
3. فيما يخص البحوث العربية تكتب هوامش البحث وقائمة المراجع وفق دليل جمعية علم النفس الأمريكية American Psychological Association(APA) الطبعة الخامسة بالنسبة للبحوث العربية وتكون الطباعة على وجه واحد على ورق (A4) بخط (Traditional Arabic) بحجم (14) للنص مع ترك مسافة 1 بين السطور وتكون الهوامش 2.5 سم و مع ترك هامش 3 سم من جهة التجليد ،
4. فيما يخص البحوث باللغة الإنجليزية تكتب وفق نظام (Modern Language Association (MLA ، بحجم خط (12) بخط (Times New Roman) مع ترك مسافة 1 بين السطور مع وجود ملخص باللغة العربية في بداية البحث بحيث لا تزيد صفحات البحث 17 صفحة ي يكون التوثيق داخل المتن (اللقب ، السنة ، الصفحة) .
5. عنوان البحث يجب أن يكون مختصرا قدر الإمكان وأن يعبر عن هدف البحث بوضوح ويتبع المنهجية العلمية من حيث التناول والإحاطة بأسلوب بحثي علمي ، وأن لا تزيد ورقات البحث عن 25 صفحة بما في ذلك صفحات الجداول والصور والرسومات وغيرها .
6. يجب على الباحث التقييد بأصول البحث العلمي وقواعده من حيث أسلوب العرض والمصطلحات وتوثيق المصادر والمراجع في آخر البحث ، وهو المسئول بالكامل عن صحة النقل من المصادر والمراجع المستخدمة ، وهيئة التحرير غير مسئولة عن أي نقل خاطئ "سرقات أدبية وعلمية " قد تحدث في تلك البحوث .
7. البحوث المقدمة للمجلة تخضع للتقييم من قبل متخصصين بشكل يضمن التقييم العلمي، ويتطلب من الباحث مراعاة سلامة بحثه من الأخطاء اللغوية والإملائية .
8. تلتزم المجلة بإشعار الباحث بقبول بحثه إن كان مقبولا للنشر أو قابلا للتعديل بعد التقييم على أن يرسل الباحث إذا قبل بحثه سيرة ذاتية (CV) مختصر قدر الإمكان يتضمن الاسم الثلاثي – والدرجة العلمية – والجامعة والكلية والقسم – وأهم المؤلفات إن وجدت – البريد الالكتروني – والهاتف .

9. البحوث المقدمة للمجلة لا تعاد لأصحابها سواء نشرت أو لم تنشر ، وهي تعبر عن رأي أصحابها فهم المسئولون عنها أدبيا وقانونيا ولا يمثل بالضرورة رأي المجلة .
10. المجلة تنشر كل ما يتعلق بالمجال العلمي والبحثي وما يتعلق بالمؤتمرات والندوات والأنشطة الأكاديمية وملخصات الرسائل العلمية ونقد الكتب على أن لا تزيد عن خمس صفحات مطبوعة
11. إشعار الباحث بقبول بحثه وإرجاعه للتصحيح أو الإضافة أو التعديل على أن يقوم بتزويد المجلة بنسخة من البحث في صورته النهائية على قرص مدمج(CD).
12. تعتبر البحوث قابلة للنشر من حيث صدور خطاب صلاحية النشر وتحال إلى الدور بانتظار الطبع حسب أولوية الدور وزخم الأبحاث المحالة للنشر .
13. يزود الباحث بنسخة من إعداد المجلة التي نشر بها بحثه .

هيئة تحرير المجلة

افتتاحية العدد

بسم الله الرحمن الرحيم

يسر هيئة تحرير مجلة العلوم الإنسانية والاجتماعية والعلمية أن تقدم الى القراء الكرام العدد الثامن بعد ان تم تعديل اسمها الى مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية بدلا من العنوان السابق بناء على ملاحظات القراء الكرام.

يأتي هذا العدد حافلا بمجموعة من البحوث والدراسات المتنوعة في مجالس العلوم الإنسانية والتطبيقية آملين أن يجد القارئ الكريم في هذا العدد مبتغاه.

وفي إطار تطور المجلة بعد ان نالت المجلة الاعتماد الدولي والاعتماد العربي فإننا نعيد تذكير السادة البحاث والمهتمين بالبحث العلمي بسياسة المجلة التي تعمل على تقديم أفضل البحوث والدراسات وفق منهجية علمية وتقديم مادة مفيدة من أجل تجويد وتحسين الإنتاج العلمي بحيث تكون الدراسات والبحوث تتناول موضوعات شتى في مختلف ميادين المعرفة سواء في مجال العلوم الإنسانية أو التطبيقية.

كما نذكر السادة البحاث فإن المجلة تفتح أبوابها لاستقبال المزيد من الإنتاج العلمي الرصين سواء على المستوي المحلي أو العربي أو الدولي، وفي الوقت نفسه نعتذر للسادة البحاث الذين قدموا بحوثهم ولم يتم استكمال تقييمها نظرا للظروف التي يمر بها البلاد فإننا سننشر الصالح منها في الاعداد القادمة بعون الله تعالى.

والله ولي التوفيق

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

Fekete -Szego Problem for Starlike of Complex functions of Order b Related to Generalized Derivative Operator

Amera Agela Alsait
Mathmatics Department Faculty of Science University of Benghazi
ameraagela@gmail.com

Nagat Muftah Alabbar
Mathmatics Department Faculty of Education of Benghazi, University of Benghazi
nagatalabar75@gmail.com

الملخص

الغرض من هذه الورقة هو دراسة وحل مشكلة the Fekete-Szego لبعض الفئات الفرعية الجديدة لدالة شبيهة بالنجوم و دالة محدبة مرتبات بالعدد المركب b والتي يرمز لها بالرمز $s_b^{\alpha,n}(m,q,\lambda)$ و $c_b^{\alpha,n}(m,q,\lambda)$ على التوالي التي تم الحصول عليها بعامل تفاضلي معمم $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ المعرف في [8] . مختلف الحالات الخاصة المعروفة أو الجديدة لنتائجنا .

Abstract

The purpose of the present paper is to investigate the Fekete-Szego problem for certain new subclasses starlike and convex functions of complex of order b denoted by $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ and $c_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ respectively, which involving certain a generalized derivative operator $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ defined in [8]. Various known or new special cases of our results are also pointed out.

Keywords: Analytic functions; Starlike of complex of order b ; Convex of complex of order b, generalized derivative operator

Introduction and Preliminaries

Fekete-Szegö problem may be considered as one of the most important results about univalent functions, which is related to coefficients of a function's Taylor series and was introduced by Fekete and Szegö [1], studied a special inequality which arises naturally from a combination of two coefficients a_2 and a_3 of a class of univalent analytic normalized function S. They obtained sharp upper bound of $|a_3 - \mu\, a_2^2|$, where μ is real. The problem of maximizing the absolute value of the functional $a_3 - \mu a_2^2$ is called Fekete-Szegö problem. After 30 years or so, Keogh and Merkes [2] solved the problem for certain subclasses of univalent functions. Then Koepf [3] gave excellent results for the class of close-to-convex functions. Moreover, this functional has also been studied for μ as real as well as complex number. And many others follow the same problems with different techniques for different classes. For other examples defined on various classes can be read in ([3]- [5] and [8]).

Let A denote the family of analytic functions f in the unit disk $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C}:|z|<1\}$ normalized by $f(0)=0=f'(0)-1$. If $f \in A$ then f has the following representation

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k. \qquad (1)$$

We also consider S the class of those functions from A which are univalent in $\mathbb{U}$.
Nasr and Aouf [6, 7] introduced $s^*(b)$ and $C(b)$, the class of starlike functions of complex order and the class of convex functions of complex order respectively. More preciously, the function $f \in A$ is said to be in the class $s^*(b)$, if it satisfies the following condition

$$s^*(b)=\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\right\}>0, z \in \mathbb{U} \text{ and } b \neq 0.$$

Similarly, the function $f \in A$ is said to be in the class $C(b)$, if it satisfies the following condition

$$C(b)=\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\}>0, z \in \mathbb{U} \text{ and } b \neq 0.$$

Observe that $s^*(1)$ and $C(1)$ represent standard starlike and convex univalent functions, respectively.

Nagat and Duras in([8],[9]) have recently introduced generalized derivative operator $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ as the following:

For the function $f \in A$ given by (1), we define a new generalized derivative operator as follows:

$$\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} k^{\alpha}\left(1+\frac{k-1}{1+q}\lambda\right)^m c(\delta,k)a_k z^k,$$

where $\delta,\alpha \in \mathbb{N}_0=\{0,1,2...\}, m \in \mathbb{Z},$ $\lambda, q \geq 0$ and $c(\delta,k)=\dfrac{(\delta+1)_{k-1}}{(1)_{k-1}},$

where $(x)_k$ denotes the Pochhammer symbol (or the shifted factorial) defined

by

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

$$(x)_k = \begin{cases} 1 & for \quad k=0 \\ x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1) & for \quad k \in \mathbb{N} = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

By specializing the parameters of $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$, we get the following derivative and integral operators.

- The derivative operator introduced by Ruscheweyh [10];

$$\mathcal{D}^{0,n}(0,q,\lambda) \equiv \mathcal{D}^{0,n}(1,0,0); (n \in \mathbb{N}_0) \equiv R^n = z + \sum_{k=2}^{\infty} c(n,k) a_k z^k.$$

- The derivative operator introduced by Sălăgean [12];

$$\mathcal{D}^{\alpha,0}(0,q,\lambda) \equiv \mathcal{D}_1^{0,0}(n,0,1); (n \in \mathbb{N}_0) \equiv D^n = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k.$$

- The generalized Salagean derivative operator introduced by Oboudi [11];

$$\mathcal{D}^{0,0}(n,0,\lambda); (n \in \mathbb{N}_0) \equiv \mathcal{D}_\lambda^n = z + \sum_{k=2}^{\infty} (1+\lambda(k-1))^n a_k z^k.$$

- The generalized Ruscheweyh derivative operator introduced by Darus and Al-Shaqsi [13];

$$\mathcal{D}^{0,n}(1,0,\lambda); (n \in \mathbb{N}_0) \equiv R_\lambda^n = z + \sum_{k=2}^{\infty} (1+\lambda(k-1)) c(n,k) a_k z^k.$$

- The derivative operator introduced by Catas [17];

$$\mathcal{D}^{0,\beta}(m,l,\lambda); (m \in \mathbb{N}_0) \equiv \mathcal{D}^m(\lambda,\beta,l) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1+\lambda(k-1)+l}{1+l} \right)^m c(\beta,k) a_k z^k.$$

- The integral operator introduced by Cho and T. H. Kim [14];

$$\mathcal{D}^{1,0}(-n,\lambda,1) \equiv I_n^\lambda = z + \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{1+\lambda}{k+\lambda} \right)^n a_k z^k.$$

Using the operator $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$, we now introduce the following classes

Definition 1.1. We say that a function $f \in A$ is in the class $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ if

$$\operatorname{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z\,\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda) f'(z)}{\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda) f(z)} - 1 \right) \right\} > 0, \; z \in \mathbb{U} \text{ and } b \neq 0$$

.

By giving specific values to m, α, δ and b, we obtain the following important subclass studied by $s_{1-b}^{0,n}(0,q,\lambda)=s^*(1-b)$ (Nasr and Aouf [6]).

Definition 1.2. We say that a function $f \in A$ is in the class $C_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ if

$$C(b)=\mathrm{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left(\frac{z\,\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)f''(z)}{\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)f'(z)}\right)\right\}>0, z \in \mathbb{U} \text{ and } b \neq 0$$

Note that $f \in C_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda) \Leftrightarrow zf' \in S_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$.

2. Main results

Befor we consider how the Taylor series coefficients of functions in the classes $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ and $C_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ might be bounded, let us first consider this problem for the Caratheodory functions.

Let P be the family of all functions p analytic in $\mathbb{U}$ for which $Re\{p\}>0$,

given by $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+\dots,\quad z\in\mathbb{U}.$

Lemma 2.1([15]) *If $p\in P$ then*

$$|c_k|\le 2, \qquad \text{for all} \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Lemma 2.2([16] *)* If $p_1(z)=1+c_1z+c_2z^2+\dots$ is an analytic function with positive real part in $\mathbb{U}$, then

$$|c_2-\upsilon c_1^2|\le 2\max\{1,|2\upsilon-1|\}.$$

The result is sharp for the function

$$p_1(z)=\frac{(1+z)}{(1-z)} \quad or \quad p_1(z)=\frac{(1+z^2)}{(1-z^2)}.$$

Theorem 2.3. Let b be nonzero complex number. If f of the form (1) is in $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$, then

$$|a_2|\le\frac{(1+q)|b|}{2^{\alpha-1}(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}$$

$$|a_3| \le \frac{2|b|(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\, max[1, 1+|1+2b|-1].$$

Proof.

By the definition of the class $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ there exists $p \in P$ such, that

$$\frac{z\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)f'(z)}{\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)f(z)} = 1-b+b\,p(z),$$

so that,

$$\frac{z\left[1+2^{\alpha+1}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)a_2 z+3^{\alpha+1}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}a_3 z^2+\cdots\right]}{z+2^{\alpha}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)a_2 z^2+3^{\alpha}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}a_3 z^3+\cdots}$$
$$=1-b+b[1+c_1 z+c_2 z^2+\cdots],$$

which implies the equality

$$\begin{aligned}
z+2^{\alpha+1}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)a_2 z^2+3^{\alpha+1}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}a_3 z^3+\cdots\\
= z+\left[c_1 b+2^{\alpha}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)\right]a_2 z^2\\
+\left[c_2 b+c_1 b 2^{\alpha}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)\right.\\
\left.+3^{\alpha}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}\right]a_3 z^3\\
+\left[c_3 b+\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m} c(\delta,2)c_2 b\right.\\
\left.+c_1 b 3^{\alpha}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}\right]a_4 z^4+\cdots
\end{aligned}$$

Equating the coefficients of both sides we have

$$2^{\alpha}\left(\frac{1+q+\lambda}{1+q}\right)^{m}(\delta+1)a_2 = c_1 b,$$

$$3^{\alpha}\left(\frac{1+q+2\lambda}{1+q}\right)^{m}\frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}a_3=\frac{b}{2}\left(c_2-\frac{{c_1}^2}{2}\right)+\frac{(1+2b)}{4}{c_1}^2 b$$

so

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية

Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

$$a_2 = \frac{bc_1(1+q)}{2^\alpha(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}, \qquad a_3 = \frac{b(c_2+bc_1^2)(1+q)}{3^\alpha(1+q+\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)} \quad (2)$$

Taking into account (2) and Lemma 2.1, we obtain

$$|a_2| = \left|\frac{bc_1(1+q)}{2^\alpha(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}\right|$$

$$\leq \frac{2|b|(1+q)}{2^\alpha(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}$$

$$= \frac{|b|(1+q)}{2^{\alpha-1}(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}$$

$$|a_3| = \left|\frac{b(1+q)}{3^\alpha(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[c_2 - \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} + bc_1^2\right]\right|$$

$$\leq \frac{|b|(1+q)}{3^\alpha(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[2 - \frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|1+2b|}{2}|c_1|^2\right]$$

$$= \frac{|b|(1+q)}{3^\alpha(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[2 + |c_1|^2\frac{|1+2b|-1}{2}\right]$$

$$= \frac{2|b|(1+q)}{3^\alpha(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)} max[1, 1 + |1+2b| - 1].$$

First, we consider the case, when $|a_3 - \mu a_2^2|$ for complex μ.

Theorem 2.4. Let b be a nonzero complex number and let $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$.Then for μ complex then

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{2b(1+q)}{3^\alpha(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)} max\left[1, \left|1 + 2b - \frac{2\mu b(1+q)(\delta+2)3^\alpha(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right]$$

For each _ there is a function in $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ such that equality holds.

Proof. Applying (2) we have

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}\left(1+q+2\lambda\right)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}[c_2+bc_1^2]-\frac{\mu b^2c_1^2(1+q)^2}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)^2}$$

$$=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}\left(1+q+2\lambda\right)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\left[c_2+bc_1^2-\frac{\mu bc_1^2(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right]$$

$$=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\left[c_2+\frac{2bc_1^2}{2}-\frac{c_1^2}{2}+\frac{c_1^2}{2}-\frac{2\mu bc_1^2(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2\,2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right]$$

$$=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\left[c_2-\frac{c_1^2}{2}+\frac{c_1^2}{2}\left(1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right)\right], \tag{3}$$

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq \frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\left[2-\frac{|c_1^2|}{2}+\frac{|c_1^2|}{2}\left|1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right]$$

$$=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}\left[2+\frac{|c_1^2|^2}{2}\left|1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|-1\right].$$

Then, with the aid of Lemma 2.2, we obtain

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq \frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^{m}(\delta+1)(\delta+2)}max\left[1,\left|1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right]$$

Taking $\delta = q = m = \alpha = 0$ and b = 1 in Theorem 2.4, we have

Corollary 2.5 [2] If $f \in s^*$, then for $\mu \in C$ we have

$$|a3 - \mu a_2^2| \leq \max\{1, |4\mu - 3|\}.$$

Moreover, for each μ, there is a function in S such that equality holds.

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 2019 ديسمبر

Theorem 2.6 Let $b > 0$, and let $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ .Then for μ real,

Then,

$$|a_3-\mu a_2^2|\le\begin{cases}\frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m}\left(1+2b\left(1-\mu\frac{3^{\alpha}\mu(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m(1+q)}{2^{2\alpha}(\delta+1)\ (1+q+\lambda)^{2m}}\right)\right) & if\quad \mu\le\sigma_1,\\ \frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m} & if\ \sigma_1\le\mu\le\sigma_2,\\ \frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m}\left(-1-2b\left(1+\mu\frac{3^{\alpha}\mu(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m(1+q)}{2^{2\alpha}(\delta+1)\ (1+q+\lambda)^{2m}}\right)\right) & if\quad \mu\ge\sigma_2.\end{cases}$$

Where

$$\sigma_1=\frac{2^{\alpha}(\delta+1)(1+q+\lambda)^{2m}}{3^{\alpha}(1+q)^m(1+q+2\lambda)^m(\delta+2)},$$

$$\sigma_2=\frac{2^{\alpha}(\delta+1)(1+q+\lambda)^{2m}[1+b]}{3^{\alpha}b(1+q)^m(1+q+2\lambda)^m(\delta+2)}.$$

Moreover for each μ, there is a function in $s_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$ such that equality hold

Proof By (3), we obtain

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[c_2-\frac{c_1^2}{2}+\frac{c_1^2}{2}\left(1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\ (\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right)\right]$$

First, let. $\mu\le\sigma_1$, In this case, by (3), Lemma 2.1 and give

$|a_3-\mu a_2^2|\le$

$$\frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[2-\frac{|c_1^2|}{2}+\frac{|c_1^2|}{2}\left|1+2b-\frac{2\mu b(1+q)\ (\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right]$$

$$\le\frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m}\left(1+2b\left(1-\mu\frac{3^{\alpha}\mu(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m(1+q)}{2^{2\alpha}(\delta+1)\ (1+q+\lambda)^{2m}}\right)\right)$$

Now let $\sigma_1\le\mu\le\sigma_2$, Then, using the above calculations, we get

$$|a_3-\mu a_2^2|\le\frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m}$$

Finally, if $\mu\ge\sigma_2$, then we obtain

$$|a_3-\mu a_2^2|\le \frac{b(1+q)}{3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}\left[2-\frac{|c_1^2|}{2}+\frac{|c_1^2|}{2}\left|-1-2b+\frac{2\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right]$$

$$\le\frac{2b(1+q)}{3^{\alpha}(\delta+1)(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m}\left(-1-2b\left(1+\mu\frac{3^{\alpha}\mu(\delta+2)(1+q+2\lambda)^m(1+q)}{2^{2\alpha}(\delta+1)\ (1+q+\lambda)^{2m}}\right)\right).$$

Using the well-known Alexander relation, we easily obtain bounds of coefficients and a solution of the Fekete-Szegö problem for the class $c_b^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$

Theorem 2.7. Let b be nonzero complex number. If f of the form (1) is in $\mathcal{D}^{\alpha,\delta}(m,q,\lambda)$, then

$$|a_2|\le\frac{(1+q)|b|}{2^{\alpha}(1+q+\lambda)^m(\delta+1)}$$

$$|a_3|\le\frac{2(1+q)|b|}{3^{\alpha+1}(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}[1+|1+2b|]$$

$$|a_3-\mu a_2^2|\le\frac{2b(1+q)}{3^{\alpha+1}(1+q+2\lambda)^m(\delta+1)(\delta+2)}max\left[1,\left|1+2b-\frac{3\mu b(1+q)\,(\delta+2)3^{\alpha}(1+q+2\lambda)^m}{2^{2\alpha+1}(1+q+\lambda)^{2m}(\delta+1)}\right|\right].$$

Taking $\delta=q=m=\alpha=0$ and $b=1$ in Theorem 2.7, we have

Corollary 2.8 [2] *S If $f\in s^*$, then for $\mu\in C$ we have*

$$|a3 - \mu a_2^2| \leq max\left\{\frac{1}{3}, |\mu - 1|\right\}.$$

Acknowledgment. The authors would like to express sincere thanks to the referee for careful reading and suggestions which helped us to improve the paper.

References

[1] M. Fekete and G. Szego, Eine Bemerkung uber ungerade schlichte funktionen, J. London Math. Soc. 8 (1933), 85-89.

[2] F.R. Keogh and E.P. Merkes, A coefficient inequality for certain classes of analytic function, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 8-12.

[3] W. Koeph, On the Fekete-Szego problem for close-to-convex functions, Proc Amer. Math. Soc. 101 (1987), 89-95

[4] M.K. Aouf and F.M. Abdulkarem, Fekete {Szego inequalities for certain class of analytic functions of complex order, International Journal of Open Problems in Complex Analysis 6 (1) (2014),1-13.

[5] M. Darus, D.K. Thomas, On the Fekete_Szegö theorem for close-to-convex functions, Math. Japonica 44 (1996) 507_511.

[6] M.A. Nasr, M.K. Aouf, Starlike function of complex order, J. Natur. Sci. Math. 25 (1985) 1_12.

[7] M.A. Nasr, M.K. Aouf, On convex functions of complex order, Mansoura Sci. Bull. (1982) 565_582.

[8] Nagat.M. Mustafa, and Maslina Darus, The Fekete-Szego problem for starlike functions of order associated with generalized derivative operator.AIP Conf. Proc. (2012) 15(22): 938-944.

[9] Nagat.m.Mustafa, and maslina Darus, Some extensions of sufficient conditions for univalence of an integral operator.Journal of Concrete and Applicable Mathematics . Apr2013, Vol. 11 Issue 2, p160-167.

[10] St. Ruscheweyh, New criteria for univalent functions, *Proc. Amer. Math.Soc*, 49(1975), 109-115.

[11] F.M. AL-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Operator Salagean, Int. J. Math. Math. Sci, **27** (2004),1429-1436.

ISSN: 2706-9087

ISSUE 8 DESEMBER 2019

مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences

العدد 8 ديسمبر 2019

[12] G. S. Salagean, Subclasses of univalent functions, Lecture Notes in Math Springer-Verlag, **1013,**(1983), 362Moreover for each μ, there is a function in S such that equality holds

[13] M. Darus and K. Al-Shaqsi, Differential Subordination with generalised derivative operator, Int.j.comp Math. Sci **2(2)**(2008),75 -78.

[14] N. E. Cho and T. H. Kim, Multiplier transformations and strongly close to-convex functions, Bull. Korean Math. Soc,40 (2003), 399-410.

[15] Duren, P.L.: Univalent Functions, Grundlehren der Mathematics. Wissenschaften, Bd., p. 259. Springer, NewYork (1983)

[16] W. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions ,in: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Z. Li, F. Ren,L. Yang, and S. Zhang(Eds.) Internat. Press (1994), 157-169.

[17] A. Catas, On a Certain Differential Sandwich Theorem Associated with a New Generalized Derivative Operator, General Mathematics. 4 (2009), 83-95.