دراسة مسألة من النمط الاول

"حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين والشرط الحدي غير المتجانس"

أ.د. عبير مصطفى الهصيك استاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم- جامعة المرقب.
أ.د. عائشة أحمد عامر استاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم- جامعة المرقب.
د. ربيعة عبد الله الشبير محاضر قسم الرياضيات كلية العلوم- جامعة المرقب.

الملخص:

نستعرض في هذا الورقة المسالة الحدية غير المتجانسة في الشكل التالي:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \ , \quad 0 < x < \infty \quad , \ t > 0$$

تحت تأثير:

شرطين ابتدائيين غير متجانسين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

وشرط حدي غير متجانس:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad , \ t > 0$$

$$\varphi \in C^{2}(x \geq 0), \psi \in C^{1}(x \geq 0), f \in C^{1}, \varphi(0)=\varphi''(0)=\psi(0)=f(0,t)=0$$

$$\mu \in C^{2}(t \geq 0), \mu(0)=\mu'(0)=\mu''(0)=0$$

و يتم تعيين الحل للمسألة أعلاه في شكل دالة في متغيرين (x,t) وهي تتمثل في مجموع الحلين $u_1(x,t), u_2(x,t)$

وذلك بالاستعانة: بالحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرط الحدي المتجانس و المسألة الحدية المتجانسة بالشرط الحدي غير المتجانس، والاستكمال الفردي للدوال.

المختصرات:

المسألة الحدية (متجانسة– غير متجانسة) – شرطين ابتدائيين– شرط حدي – الاستكمال.

دراسة مسألة من النمط الاول

"حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين والشرط الحدي غير المتجانس"

المقدمة:

ندرس حل المسألة الحدية التالية :-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty \qquad \ldots (^*)$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad , \; t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \ge 0), \psi \in C^1(x \ge 0), f \in C^1, \varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = f(0,t) = 0$$

$$\mu \in C^2(t \ge 0), \mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$$

الحل العام هو مجموع الحلين كالتالي:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

حيث كلاً من $u_1(x,t), u_2(x,t)$ معرفة بالشكل التالي على التتالي :

$$u_1(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t), 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = 0 \quad , \; t > 0$$

$$u_2(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t)=\mu(t) \quad , \ t>0$$

فالحل لـ $u_1(x,t)$ و هو يتمثل في الحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين و الشرط الحدي المتجانس كالتالي:

ندرس حل المسألة الحدية التالية:-

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+a^2f(x,t) \quad , \quad 0<x<\infty$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t)=0 \quad , \ t>0$$

$$\varphi\in C^2(x\geq 0),\psi\in C^1(x\geq 0), f\in C^1,\varphi(0)=\varphi''(0)=\psi(0)=f(0,t)=0$$

ندرس الدوال $\Phi(x),\Psi(x),F(x,t)$ اللاتي تعتبرن استكمال فردي للدوال $\varphi(x),\psi(x),f(x,t)$ اللاتي تدخلن في الشرطين الابتدائيين:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x>0\\ \varphi(-x),x<0\end{cases} ، \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x>0\\ \psi(-x),x<0\end{cases} \quad , F(x,t)=\begin{cases}f(x,t),x>0\\ f(-x,t),x<0\end{cases}$$

الدالة التالية:-

$$u(x,t)=\frac{\Phi(\text{x+at})+\Phi(\text{x-at})}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

. . . (**)

معرفة لجميع قيم x و $t>0$.

وبدراسة الدالة الناتجة $u(x,t)$ فقط للقيم $x\geq 0,t\geq 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط المسألة المصاغة أعلاه .

و كذلك يمكن صياغة الدالة $u(x,t)$ بالشكل الاتي :-

نناقش الحالتين :

عند: $t<\dfrac{x}{a},x>0$ وعند: $t>\dfrac{x}{a},x>0$

الحالة الأولى عند: $t<\dfrac{x}{a},x>0$

$$t<\frac{x}{a}\Rightarrow\ x+at>0,x-at>0\quad ,x+a(t-\tau)>0,x-a(t-\tau)>0$$

$$x+at>0 \Rightarrow \Phi(x+at)=\varphi(x+at) \quad , \quad x-at>0 \Rightarrow \Phi(x-at)=\varphi(x-at)$$

أما

$$\int_{x-at>0}^{x+at>0} \Psi(\alpha)d\alpha = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau)>0}^{x+a(t-\tau)>0} F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ, Ψ, F في (**) نحصل على :-

$$u(x,t)=\frac{\varphi(\text{x+at})+\varphi(\text{x-at})}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

. . . (***)

الحالة الثانية عند: $t>\dfrac{x}{a}, x>0$

$$t>\frac{x}{a}, x>0 \quad , \quad x+at>0, x-at<0 \, , x+a(t-\tau)>0, x-a(t-\tau)<0$$

$$x-at<0 \Rightarrow \Phi(x-at)=-\varphi(-(x-at))=-\varphi(at-x)$$

$$x+at>0 \Rightarrow \Phi(x+at)=\varphi(x+at)$$

أما

$$\int_{x-at<0}^{x+at>0} \Psi(\alpha)d\alpha = \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau)<0}^{x+a(t-\tau)>0} F(\alpha,\tau)d\alpha d\tau = \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ, Ψ, F في (**) نحصل على :-

$$u(x,t)=\frac{\varphi(\text{x+at})-\varphi(\text{at-x})}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau$$

. . . (****)

من (***) و (****) نحصل على الحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين والشرط الحدي المتجانس: –

$$u_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0\end{cases}$$

والحل لـ $u_2(x,t)$ هو يتمثل في الحل العام للمسألة الحدية المتجانسة بالشرطين الابتدائيين المتجانسين و الشرط الحدي غير المتجانس كالتالي:

ندرس حل المسألة الحدية التالية :–

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad , \quad 0<x<\infty$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=0$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t)=\mu(t) \quad , \quad t>0$$

من الواضح أن النظام الحدي يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a مما يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل:

$$u_2(x,t) = f(x-at)$$

نعين الدالة f من الشرط الحدي $u_2(0,t) = \mu(t), t > 0$ نحصل على:-

$$u_2(0,t) = f(-at) = \mu(t), t > 0$$

نفترض أن: $t = -\frac{z}{a} \Leftrightarrow z = -at$

$$u_2(0,-\frac{z}{a}) = f(z) = \mu(-\frac{z}{a}), \frac{z}{a} < 0 \Rightarrow f(z) = \mu(-\frac{z}{a})$$

و منها:

$$u_2(x,t) = \mu(-\frac{x-at}{a}) = \mu(t-\frac{x}{a})$$

غير أن هذه الدالة معرفة فقط في المنطقة $x - at \leq 0$ لأن $\mu(t)$ معرفة للقيم $t \geq 0$

لتعيين $u_2(x,t)$ لجميع قيم المتغيرين المستقلين نستكمل الدالة $\mu(t)$ إلى القيم السالبة للمتغير t و بفرض أن: $\mu(t) = 0$ للقيم $t < 0$

و الحل لـ $u_2(x,t)$ هو حل المسألة الحدية المتجانسة بالشرطين الابتدائيين المتجانسين والشرط الحدي غير المتجانس: $u(0,t) = \mu(t)$ -

$$u_2(x,t)=\begin{cases} 0, t<\dfrac{x}{a} \\ \mu(t-\dfrac{x}{a}), t\geq\dfrac{x}{a} \end{cases}$$

مجموع الدالتين $u_1(x,t), u_2(x,t)$ هو عبارة عن الحل العام للمسألة من النمط الاول "المسألة الحدية غير المتجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين و الشرط الحدي غير المتجانس":-

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0 \\ \mu(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0 \end{cases}$$

. . . (*****)

- مثال تطبيقي:

عين حل المسألة الحدية التالية :-

$$u_{tt}=4u_{xx}+64t^2 \quad ; \quad 0<x<\infty \ , \ t>0$$

$$u(x,0)=\frac{1}{6}x \quad ; \quad u_t(x,0)=2\sin x$$

$$u(0,t)=4t^4$$

من الواضح أن المسألة المصاغة هي مسألة حدية غير متجانسة بالشرطين الابتدائيين غير المتجانسين و الشرط الحدي غير المتجانس :-

بالمقارنة بالعلاقة (*) نحصل على:

$$a=2\ ;\ \ f(x,t)=16t^2\ ,\ \varphi(x)=\frac{1}{6}x\ ,\ \psi(x)=2\sin x\ ,\ \mu(t)=4t^4$$

بالتطبيق في الحل العام للدالة (*****) نحصل على :-

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{a}, x>0\\ \mu(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\dfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau, t>\dfrac{x}{a}, x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{6}(x+2t)+\frac{1}{6}(x-2t)}{2}+\dfrac{1}{2.2}\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t}2\sin\alpha d\alpha+\dfrac{1}{2.2}\int_0^t\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}16\tau^2 d\alpha d\tau, t<\dfrac{x}{2}, x>0\\ 4(t-\dfrac{x}{2})^4+\dfrac{\frac{1}{6}(x+2t)-\frac{1}{6}(2t-x)}{2}+\dfrac{1}{2.2}\displaystyle\int_{2t-x}^{x+2t}2\sin\alpha d\alpha+\dfrac{1}{2.2}\int_0^t\int_{2(t-\tau)-x}^{x+2(t-\tau)}16\tau^2 d\alpha d\tau, t>\dfrac{x}{2}, x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{2}(\cos(x+2t)-\cos(x-2t))+16\displaystyle\int_0^t(t\tau^2-\tau^3)d\tau, t<\dfrac{x}{2}, x>0\\ 4(t-\dfrac{x}{2})^4+\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{2}(\cos(x+2t)-\cos(2t-x))+8\displaystyle\int_0^t x\tau^2 d\tau, t>\dfrac{x}{2}, x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{x}{6}+\sin x.\sin 2t+16[\frac{1}{12}t^4], t<\frac{x}{2}, x>0 \\ \frac{1}{4}(2t-x)^4+\frac{x}{6}+\sin x.\sin 2t+8[x\frac{t^3}{3}], t>\frac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases} \frac{x}{6}+\sin x.\sin 2t+\frac{4}{3}t^4, t<\frac{x}{2}, x>0 \\ \frac{1}{4}(2t-x)^4+\frac{x}{6}+\sin x.\sin 2t+\frac{8}{3}xt^3, t>\frac{x}{2}, x>0 \end{cases}$$

هو الحل العام للمسألة الحدية المعطاة.

المـــراجـع العربية:

1– أ. تيخونوف و أ. سامارسكي، معادلات الفيزياء الرياضية الجزء(1،2)، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفييتي– موسكو، 1984، ترجمة من الروسية: د. القرماني أحمد.

2– د.ديفد . ل . باورز، مسائل القيم الحدية، الطبعة الاولى، دار إنتربرينت ليميتد للطباعة والنشر، مالطا، 1985، ترجمة : د. القرماني أحمد – د. عوين علي.

3– ن. كشليكوف و أ. قلينيف و م. سميرنوف، معادلات الفيزياء الرياضية الجزئية، 1970.

4– د.قاسيموف قربان – رازيف اعتيبار – شاحوت عياد، معادلات الفيزياء الرياضية، الطبعة الاولى، دار الخمس.

5– دله الزوام، المعادلات التفاضلية الجزئية للأقسام العلمية والهندسية، جامعة الفاتح– طرابلس، ليبيا، 1998م.

6– هب الريح أحمد، اساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية الجزء(1،2)، دار ومكتبة الشعب– مصراته، ليبيا 2004م.

7– رينشارد برونسون، سلسلة المسائل المحلولة شوم في المعادلات التفاضلية، ترجمة: د– فوق العادة فايز.

8– موارى ر . شبيجل، سلسلة ملخصات شوم في الدوال المركبة و الرياضيات المتقدمة، ترجمة: د. العويضى حسن.

المراجع الأجنبية

1-E.A.Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equation Company New York Toronto / London - 1955.

2-W.T.Donald, Applied partial Differential Equation , The university of Manitoba PWS – Publishing Company – 1990 .

3- A.C.King , J.Billingham & S.R.Otto, Differential Equations First Edition – 2003, Print in the United Kingdom the university Press, Cambridge.