إيجاد الدوال الذاتية للمسائل الحدية
ومن تم دراسة التعامد والتواحد لهذه الدوال

عبير مصطفى مفتاح الهصيك
جامعة المرقب/كلية العلوم
قسم الرياضيات
abeer.alhaseek@gmail.com

ربيعة عبد الله الشبير
جامعة المرقب/كلية العلوم
قسم الرياضيات
r_a_sh.2006@yahoo.com

عائشة أحمد عامر
جامعة المرقب/كلية العلوم
قسم الرياضيات
eamer_80@yahoo.com

الملخص:

نستعرض في هذا البحث إيجاد الدوال الذاتية للمسائل الحدية " للمعادلات المقيدة بشروط حدية " ومن تم دراسة التعامد والتواحد للدوال الذاتية.

وذلك بالاستعانة: بمسألة شتورم– ليوفيل وبعلاقة جرين والشروط الحدية المعطاة.

المقدمة:

- المسألة الحدية في هذا البحث هي معادلة مقيدة بشروط حدية.
- مسألة شتورم – ليوفيل تعطى بالصيغة التالية:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad ; \quad 0<x<l$$
$$X(0)=X(l)=0$$

وقد تم الحصول على هذه المسألة:

من المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$$

المقيدة بشروط حدية متجانسة:

$$u(l,t)=0, \qquad u(0,t)=0$$

و شروط ابتدائية غير متجانسة:–

$$u_t(x,0)=\psi(x), \qquad u(x,0)=\varphi(x)$$

ونعبر عن الدالة $u(x,t)$ في صورة حاصل ضرب باستخدام فصل المتغيرات لكي نحصل على مسألة شتورم – ليوفيل.

– كما نعرف تعامد وتواحد الدوال الذاتية للمسألة الحدية:

فإذا كان $X_m(x), X_n(x)$ دوال ذاتية وكانت $n \neq m$ فإنه يقال أن الدوال الذاتية تكون متعامدة بوزن $p(x)$ في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ ، إذا حققت الشرط التالي:

$$\int_0^l X_n(x).X_m(x).p(x)dx = 0 \qquad (^*)$$

"حيث $p(x)$ معامل $\lambda X(x)$ في المسألة الحدية"

وإذا كانت $n = m$ فإنه يقال أن الدوال الذاتية تكون متواحدة و تكون بالصيغة التالية:

$$X_n^*(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, 0 \leq x \leq l$$

حيث:

$$N = \|X_n(x)\| = \sqrt{\int_0^l p(x).[X_n(x)]^2 dx} \Rightarrow N^2 = (\|X_n(x)\|)^2 = \int_0^l p(x).[X_n(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l X_n^* \cdot X_m^* .p(x)dx = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

مع ملاحظة أن الدالة الذاتية المتواحدة بالفعل تكون دالة ذاتية متعامدة والعكس ليس صحيح دائما.

و كانت علاقة جرين في هذا البحث سبب في إثبات شرط التعامد للدوال الذاتية الذي حصلنا عليه في العلاقة (*).

استعرضنا في هذا البحث المسألة التالية:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad , 0 < x < l$$

بالشروط الحدية:

$$-l_1 X' + h_1 X = 0, x = 0$$
$$l_2 X' + h_2 X = 0, x = l$$
$$l_1, l_2, h_1, h_2 \neq 0$$

وبالمقارنة بمسألة شتورم – ليوفيل فإن المسألة أعلاه هي حالة خاصة من مسألة شتورم – ليوفيل وهي تطبيق لإحدى خواصها.

يتم تعيين القيم الذاتية والدوال الذاتية كالتالي:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \Leftrightarrow k = \pm i\lambda$$

$$\therefore X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow X'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x$$

من الشرط الأول: $-l_1 X'(0) + h_1 X(0) = 0$

$$\Rightarrow -l_1(-A\lambda\sin\lambda.0 + B\lambda\cos\lambda.0) + h_1(A\cos\lambda.0 + B\sin\lambda.0) = 0$$

$$\Rightarrow -l_1(B\lambda) + h_1(A) = 0$$

ومنها نحصل على:-

$$\Rightarrow B = \frac{h_1}{l_1\lambda}A \tag{1}$$

من الشرط الثاني: $l_2 X'(l) + h_2 X(l) = 0$

$$\Rightarrow l_2(-A\lambda\sin\lambda.l + B\lambda\cos\lambda.l) + h_2(A\cos\lambda.l + B\sin\lambda.l) = 0 \tag{2}$$

بتعويض (1) في (2) نحصل على:-

$$\Rightarrow l_2(-A\lambda\sin\lambda.l + \frac{h_1}{l_1\lambda}A\lambda\cos\lambda.l) + h_2(A\cos\lambda.l + \frac{h_1}{l_1\lambda}A\sin\lambda.l) = 0$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في $\frac{l_1\lambda}{A}$ نحصل على:-

$$-l_1 l_2\lambda^2\sin\lambda.l + l_2 h_1\lambda\cos\lambda.l + h_2 l_1\lambda\cos\lambda.l + h_2 h_1\sin\lambda.l = 0$$

$$\Leftrightarrow (l_1 l_2\lambda^2 - h_1 h_2)\sin\lambda.l = \lambda(l_2 h_1 + h_2 l_1)\cos\lambda.l$$

بقسمة الطرفين على $(l_1 l_2\lambda^2 - h_1 h_2)\cos\lambda.l$ نحصل على:-

$$\tan\lambda l = \frac{\lambda(l_2 h_1 + h_2 l_1)}{(l_1 l_2\lambda^2 - h_1 h_2)}$$

$$\Rightarrow \tan\lambda l = \frac{\dfrac{\lambda(l_2 h_1 + h_2 l_1)}{l_1 l_2}}{\dfrac{(l_1 l_2 \lambda^2 - h_1 h_2)}{l_1 l_2}}$$

$$\Rightarrow \tan\lambda l = \frac{\lambda\left(\dfrac{h_1}{l_1} + \dfrac{h_2}{l_2}\right)}{\left(\lambda^2 - \dfrac{h_1 h_2}{l_1 l_2}\right)} \qquad \Rightarrow \lambda_n = \tan\lambda l = \frac{\lambda\left(\dfrac{h_1}{l_1} + \dfrac{h_2}{l_2}\right)}{\left(\lambda^2 - \dfrac{h_1 h_2}{l_1 l_2}\right)}$$

وهي القيم الذاتية:

$$\Rightarrow \lambda_n = \begin{cases} \tan\lambda l \\ \dfrac{\lambda\left(\dfrac{h_1}{l_1} + \dfrac{h_2}{l_2}\right)}{\left(\lambda^2 - \dfrac{h_1 h_2}{l_1 l_2}\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \lambda l = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

والدوال الذاتية:

$$\Rightarrow X_n(x) = A\cos\lambda_n x + \frac{h_1}{l_1 \lambda_n} A\sin\lambda_n x \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

كحالة خاصة عند: $A = 1$

$$\Rightarrow X_n(x) = \cos\lambda_n x + \frac{h_1}{l_1 \lambda_n}\sin\lambda_n x \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

وهى دوال ذاتية.

ولكي تكون الدالة أعلاه دالة ذاتية متواحدة نضعها في الصورة التالية:

$$\Rightarrow X_n^{*}(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|} = \frac{1}{N}\left(\cos\lambda_n x + \frac{h_1}{l_1 \lambda_n}\sin\lambda_n x\right) \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

حيث $X_n^{*}(x)$ المعرفة بالصيغة أعلاه تعطي دوال ذاتية متواحدة، منها نجد N^2 التي بدورها تجعل الدالة الذاتية أعلاه متواحدة:

$$N^2 = [\|X_n(x)\|]^2 = \int_0^l (\cos\lambda_n x + \frac{h_1}{l_1\lambda_n}\sin\lambda_n x)^2 dx$$

$$= \int_0^l (\cos^2\lambda_n x + 2\frac{h_1}{\lambda_n l_1}\cos\lambda_n x \sin\lambda_n x + \frac{h_1^2}{\lambda_n^2 l_1^2}\sin^2\lambda_n x)dx$$

$$= \int_0^l \frac{(1+\cos 2\lambda_n x)}{2}dx + \frac{h_1}{\lambda_n l_1}\int_0^l \sin 2\lambda_n x dx + \frac{h_1^2}{\lambda_n^2 l_1^2}\int_0^l \frac{(1-\cos 2\lambda_n x)}{2}dx$$

(3)

حيث :

$$\int_0^l \frac{(1+\cos 2\lambda_n x)}{2}dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}(\sin 2\lambda_n . l) \qquad (4)$$

$$\int_0^l \sin 2\lambda_n x dx = \frac{-1}{2\lambda_n}(\cos 2\lambda_n . l - 1) \qquad (5)$$

$$\int_0^l \frac{(1-\cos 2\lambda_n x)}{2}dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}(\sin 2\lambda_n . l) \qquad (6)$$

بتعويض (4) و (5) و (6) في (3) نحصل على:-

$$\therefore N^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_1}{2\lambda_n^2 l_1}[\frac{h_1 l}{l_1} + 1] + (\frac{1}{4\lambda_n} - \frac{h_1^2}{4\lambda_n^3 l_1^2})\sin 2\lambda_n . l - \frac{h_1}{2 l_1 \lambda_n^2}\cos 2\lambda_n . l \qquad (7)$$

$$\because \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad , \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\because \tan\lambda_n l = \frac{\lambda_n\left\{\dfrac{h_1}{l_1}+\dfrac{h_2}{l_2}\right\}}{\left\{\lambda_n^2-\dfrac{h_1h_2}{l_1l_2}\right\}} \quad \Rightarrow \tan^2\lambda_n l = \frac{\lambda_n^2\left\{(\dfrac{h_1}{l_1}+\dfrac{h_2}{l_2})^2\right\}}{\left\{(\lambda_n^2-\dfrac{h_1h_2}{l_1l_2})^2\right\}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\lambda_n l = \frac{\lambda_n^2\left\{(\dfrac{l_2h_1+h_2l_1}{l_1l_2})^2\right\}}{\left\{(\dfrac{l_1l_2\lambda_n^2-h_1h_2}{l_1l_2})^2\right\}}$$

نعوض عن $\tan\alpha$ و $\tan^2\alpha$ بما يساويهم في $\sin 2\alpha$ بدلالة $\lambda_n l$ نحصل على:-

$$\sin 2\lambda_n.l = \frac{\dfrac{2\lambda_n(\dfrac{h_1}{l_1}+\dfrac{h_2}{l_2})}{(\lambda_n^2-\dfrac{h_1h_2}{l_1l_2})}}{1+\dfrac{\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2}}$$

$$= \frac{2\lambda_n(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)(h_1l_2+h_2l_1)}{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2} \qquad (8)$$

و بالمثل نعوض عن $\tan\alpha$ و $\tan^2\alpha$ بما يساويهم في $\cos 2\alpha$ بدلالة $\lambda_n l$ نحصل على:-

$$\Rightarrow \cos 2\lambda_n.l = \frac{1-\dfrac{\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2}}{1+\dfrac{\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2}}$$

$$= \frac{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2-\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2l_1l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2} \qquad (9)$$

بتعويض كل من (8) و (9) في العلاقة (7) نحصل على:-

$$N^2=\frac{l}{2}+\frac{h_1}{2l_1\lambda_n^2}\left[\frac{h_1}{2\lambda_n^2 l_1}+1\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{4\lambda_n}-\frac{h_1^2}{4\lambda_n^3 l_1^2}\right)\frac{2\lambda_n(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)(h_1l_2+h_2l_1)}{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}+$$

$$-\frac{h_1}{2l_1\lambda_n^2}\frac{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2-\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}$$

$$\Rightarrow X_n^*(x)=\frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}=\frac{1}{N}(\cos\lambda_n x+\frac{h_1}{l_1\lambda_n}\sin\lambda_n x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{l}{2}+\frac{h1}{2l1\lambda n^2}\left[\frac{h1}{2\lambda n^2 l1}+1\right]}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4\lambda_n}-\frac{h_1^2}{4\lambda_n^3 l_1^2}\right)\frac{2\lambda_n(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)(h_1l_2+h_2l_1)}{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}}}+$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{h_1}{2l_1\lambda_n^2}\frac{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2-\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}{(\lambda_n^2 l_1 l_2-h_1h_2)^2+\lambda_n^2(h_1l_2+h_2l_1)^2}}}\left[\cos\lambda_n x+\frac{h_1}{l_1\lambda_n}\sin\lambda_n x\right]$$

$$\Rightarrow\int_0^l X_n^*\cdot X_m^*.p(x)dx=\begin{cases}1,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$$

إذا فهي دوال ذاتية متعـامـدة و متوا حدة، وبالفعل كل دالة ذاتية متوا حدة تكون دالة ذاتية متعامدة والعكس غير صحيح.

المـــراجع

1- أ. تيخونوف و أ. سامارسكي، معادلات الفيزياء الرياضية الجزء(1،2)، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفييتي- موسكو، 1984، ترجمة من الروسية: د. القرماني أحمد.

2- د.ديفد . ل . باورز، مسائل القيم الحدية، الطبعة الاولى، دار إنتربرينت ليميتد للطباعة والنشر، مالطا، 1985، ترجمة: د. القرماني أحمد, د.عوين علي.

3- ن. كشليكوف و أ. قلينيف و م. سميرنوف، معادلات الفيزياء الرياضية الجزئية، 1970.

4- د.قاسيموف قربانز, رازيف اعتيبار, شاحوت عياد، معادلات الفيزياء الرياضية، الطبعة الاولى، دار الخمس.

5- دله الزوام، المعادلات التفاضلية الجزئية للأقسام العلمية والهندسية، جامعة الفاتح- طرابلس، ليبيا، 1998م.

6- هب الريح أحمد، اساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية الجزء(1،2)، دار ومكتبة الشعب- مصراته، ليبيا 2004م.

7- جون أ. تيربي، المعادلات التفاضلية، ترجمة:د. القرمانى أحمد, د. سالم الفيتوري،منشورات جامعة الفاتح سنة 1989م.

8- أ.د- شكر الله إميل ، المعادلات التفاضلية العادية و تحويلات لابلاس، دار النشر والطباعة موسسة بيتر للطباعة والتوريدات، الطبعة الثانية سنة 2002م.

9- رينشارد برونسون، سلسلة المسائل المحلولة شوم في المعادلات التفاضلية، ترجمة: د.فوق العادة فايز.

10- موارى ر. شبيجل، سلسلة ملخصات شوم في الدوال المركبة و الرياضيات المتقدمة، ترجمة:د.العويضى حسن

11-E.A.Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equation Company New York Toronto / London - 1955.

12-W.T.Donald, Applied partial Differential Equation , The university of Manitoba PWS – Publishing Company – 1990 .

13- A.C.King , J.Billingham & S.R.Otto, Differential Equations First Edition – 2003, Print in the United Kingdom the university Press, Cambridge.

14-Deang . Duffy, Green's Functions With Applications, Chapman & Hall / CRC – 2001.

15- M . D . Raisinghania S . Chand & Companyltd, Advanced Differential Equations, Newddlhi - 2004.

16- George F . Simmons Mc Graw – Hill , Inc, Differential Equations With Applications & Historical Notes Second Eddition .