

## حل مسألة القيمة الذاتية للنمطين الكهربائي TE والمغناطيسي TM المستعرضين للأفلام الرقيقة دورية الطبقات

عبد السلام محمد إبراهيم  
قسم الفيزياء/كلية العلوم  
جامعة طرابلس

علي احمد بشير المجاهد  
قسم الفيزياء/كلية التربية  
قصر بن غشير/جامعة طرابلس

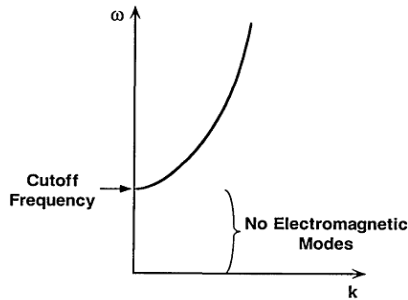
عبد العزيز احمد الكويلاني  
قسم الفيزياء/كلية الآداب والعلوم  
قصر الأخيار/جامعة المرقب

### الملخص

سلوك الموجات الكهرومغناطيسية يعتمد على خصائص الوسط المار فيه [27], [25], [24], [10], [4], . للأفلام الرقيقة ذات الترتيب المتعاقب دورياً تأثير مختلف عن الأوساط المتجانسة في بعد واحد وبعدين, [16][9][3] مما يميزها في عدة تطبيقات من أبرزها في الاتصالات [20]. في هذه الورقة تم دراسة انتشار الموجة في بعد واحد [14], [7]. حيث تم تصميم عينة ذات خصائص بصرية مختلفة  $\epsilon_1, \epsilon_2$  وباستخدام لغة MATLAB تمت محاكات الوسط [30], [26], [11], [4], [5] والحصول على الترددات الكهرومغناطيسية الممنوعة. بالإضافة لذلك دراسة التأثير الواضح للنسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  على عرض الفجوة.

### المقدمة

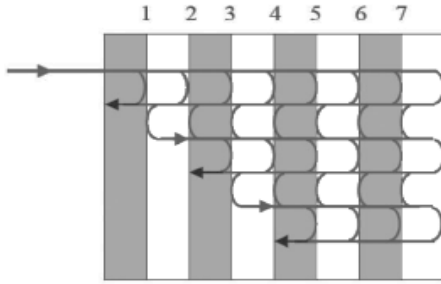
الأفلام الرقيقة هي عبارة عن تراكيب عازلة ودورية وذلك بالتغيير الدوري في ثابت العزل، بحيث يتم أخذ مادتين عازلتين مختلفتين تماماً في معامل الانكسار، وتكرر تلك المادتين بشكل متعاقب (أي متناوب) للحصول على تركيبة دورية. إن الغاية من هذه التصميمات هو منع الموجات الكهرومغناطيسية من الانتقال في هذا الاتجاه الدوري للأفلام الرقيقة كما بالشكل (1) [19][10][7][23][6][18].



الشكل (1) الأنمط الكهرومغناطيسية للانبعاش التلقائي التي لها ترددات أقل من تردد القطع تكون ممنوعة من المرور خلال البلورة.

إن الطول الموجي للموجات الكهرومغناطيسية المنتشرة عبر الطبقات و المتعاقبة دورياً يحدث لها انعكاساً جزئياً بكل طبقة عند الحد الفاصل الشكل (2)، وهذه الانعكاسات المتعددة يحدث لها تداخل بناءً وهداماً يعيق حركة انتقال الموجات الساقطة إلى الأمام [12]. وبما أن الأفلام الرقيقة أحادية البعد وبالتالي فإن التداخلات البناءة والهدامة

بين الموجات الساقطة والمنعكسة تسبب في انتقال الموجة من عدمه، وأما عن السلوك الموجي داخل فجوة الممنوعة فإن هناك حالتان : الأولى إذا كان الطول الموجي من ضمن تردد الفجوة فإنه سينشأ انعكاسات جزئية للموجات الساقطة عند الحد الفاصل للطبقات المتعاقبة، و تلك الموجات المنعكسة تكون متوافقة في الطور، وعند ذلك تتحد مع الموجات الساقطة؛ لتخلق موجات موقوفة بحيث لا تستطيع الحركة خلال البلورة. والحالة الثانية، فإن الطول الموجي لا يقع ضمن تردد الفجوة وعليه فإن الموجات المنعكسة سوف لن تكون متوافقة في الطور، وبذلك تلغى بعضها البعض، وفقاً لذلك فإن الموجات الساقطة تنتقل دون أن تعاني أي فقد في الطاقة.



الشكل (2) يبين الانعكاس الجزئي للموجات عند الحدود الفاصلة بين الطبقات المتعاقبة لعاكس براج.

### النظرية

#### معادلات ماكسويل في الأوساط الدورية :

معادلات ماكسويل ؛ وذلك لما تمثله تلك المعادلات من أهمية في دراسة الأوساط الدورية، إن انتقال الموجات الكهرومغناطيسية في الأفلام الرقيقة خاضعة لمعادلات ماكسويل الأربعة [29]. قبل صياغة معادلات ماكسويل للوسط سيم وضع بعض التقريبات التي تسهل عملية المعالجة الرياضية وهي : ان شدة المجالات تكون صغيرة بحيث يتم التعامل مع نظام خطي linear regime. وان ثابت العزل لا يعتمد على التردد. والمادة تكون متناظرة isotropic بالتالي فإن المتجهات  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{D}$  تكون مرتبطة بثابت  $\epsilon_0$  مضروباً في دالة العزل القياسية  $\epsilon(\mathbf{r})$ . بالتعامل مع المواد الشفافة material transparent يكون من الممكن معالجة  $\epsilon(\mathbf{r})$  ككمية حقيقية موجبة. والنفاذية المغناطيسية  $\mu(\mathbf{r})$  الأفلام الرقيقة تقترب جدا من الواحد الصحيح. واخيرا لوجود للشحنات الحرة والتيارات ، وعليه لا توجد أي مصادر أو بالوعات لذلك ينبغي وضع  $\rho = 0$  و  $\mathbf{J} = 0$  وفي ظل هذه التقريبات ؛ فإنه يمكن وضع  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  و  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$  باتالي فإن معادلات ماكسويل تصاغ كما يلي:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

و يطلق عليها معادلات ماكسويل للوسط الدوري.

المعادلات الموجية ومسائل القيم الذاتية :

يمكن الآن حذف إحدى هذه المتجهات  $E(\mathbf{r}, t)$  أو  $H(\mathbf{r}, t)$  من نظام معادلات ماكسويل للوسط الدوريل للحصول على المعادلة الموجية للمجال الكهربائي أو المغناطيسي :-

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad [1] \quad (5)$$

ويطلق عليها بالمعادلة الموجية للمجال الكهربائي.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad [1] \quad (6)$$

وتدعى بالمعادلة الموجية للمجال المغناطيسي

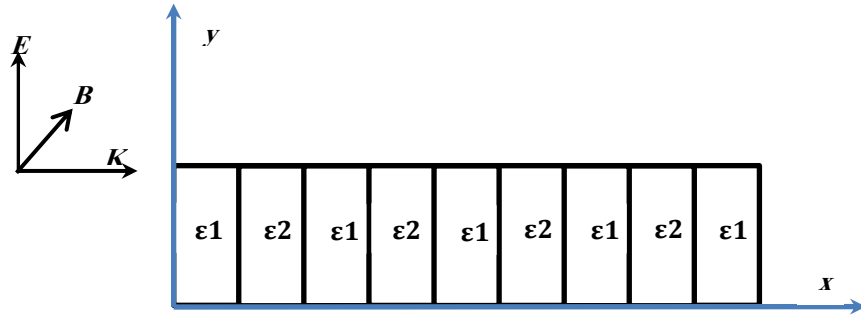
الحلول الموجية للمعادلتين (5) و(6) يمكن كتابتها في صورة نمط مكاني مضروباً في الدالة الأسية المركبة كالاتي :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad , \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$$

حيث إن  $\omega$  تمثل التردد الذاتي و  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  و  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  تمثل الدوال الذاتية للمعادلات الموجية [1].

معالجة مسألة القيمة الذاتية للمجال الكهربائي في بعد واحد [14]

في حالة الترتيب الدوري في بعد واحد سيتم تصور فيلم رقيق متعدد الطبقات ينشئ من مادتين عازلتين، بحيث يكون ثابت العزل للطبقة الأولى  $\epsilon_1$ ، بينما الطبقة الثانية تكون  $\epsilon_2$ ، وبعد ذلك تنتظم هاتين الطبقتين في شكل دوري متعاقب إلى ما لا نهاية في بعد واحد كما في الشكل (3) علماً بأن الموجات الكهرومغناطيسية تنتقل في الاتجاه  $x$  .



الشكل (3) يوضح الأفلام الرقيقة متعددة الطبقات.

من الشكل الذي فيه المجال الكهربائي له مركبة في الاتجاه  $y$  (تكون متعامدة على الإحداثي  $x$ ) بينما المجال

المغناطيسي مركبته تكون في الاتجاه  $z$  في حين المتجه الموجي سيكون  $\mathbf{k} = k_x \hat{x}$ .

وبالنظر إلى معادلات ماكسويل والتي يمكن كتابة الحلول الموجية لها في الصورة المركبة، وهذا يسمح بكتابة الدالة الموجية في هيئة نمط مكاني مضروباً في الدالة الأسية المركبة :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

وبالتعويض بهذه الدوال في معادلات ماكسويل (5 و6)، ومن ثم أخذ الاشتقاق الزمني لتلك الدوال، يتم بذلك استنباط

مسألة القيمة الذاتية للبلورة الفوتونية في بعد واحد.

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -\lambda_E^2 E(x) \quad (7)$$

حيث إن  $\lambda_E^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  هي الصيغة المستنتجة، والتي تعرف بالمعادلة الموجية للمجال الكهربائي خلال الوسط الدوري. بما أن الوسط دوري؛ فإنه بالإمكان استعمال مبرهنة بلوخ [11]، وإعادة صياغة معادلة الموجة (7) بالصيغ الرياضية التالية :

$$\sum_m \kappa_m E_{j-m} \left( k + \frac{2\pi}{a} (j - m) \right)^2 = \lambda_E^2 E_j \quad (8)$$

وهذه المعادلة تعرف بمسألة القيمة الذاتية للمجال الكهربائي للبلورة الفوتونية في بعد واحد [12], [14].

معالجة مسألة القيمة الذاتية للمجال المغناطيسي في بعد واحد :

المعادلة الموجية للمجال المغناطيسي يمكن بسهولة اشتقاقها من نظام معادلات ماكسويل ووضع  $\lambda_H^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  فنحصل على الصورة التالية :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} H(x) = \lambda_H^2 H(x) \quad (9)$$

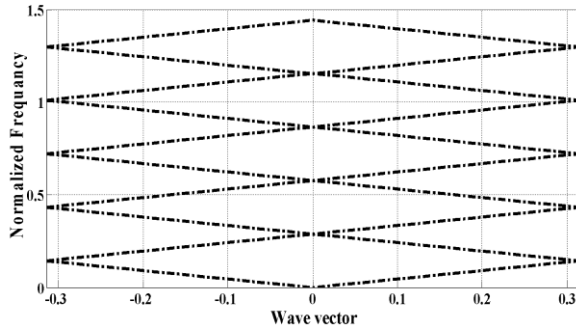
وبإعادة كتابة المعادلة الموجية (9) للمجال المغناطيسي في الوسط الدوري باستخدام مبرهنة بلوخ [11] تصبح المعادلة (9):

$$-\sum_{G'} \kappa(G - G') [(k + G') \cdot (k + G)] u_{G'} = \lambda_H^2 u_G \quad (10)$$

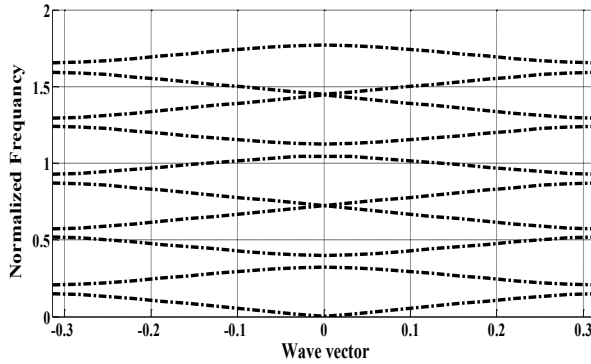
وتعرف هذه المعادلة بمسألة القيمة الذاتية للمجال المغناطيسي في بعد واحد [14][16].

### النتائج والحسابات

عند حل مسألة القيمة الذاتية في بعد واحد للأفلام الرقيقة المتعددة الطبقات، للنمطين المستعرض الكهربائي؛ و المستعرض المغناطيسي، وذلك لمعرفة مدى الترددات المسموحة، ومدى الترددات الممنوعة في الفجوة من خلال الحصول على علاقة التشتت للأفلام الرقيقة أحادية البعد. بحل مسائل القيم الذاتية (8) و (10) وذلك من خلال كتابة مصفوفة المؤثر التفاضلي باستخدام برنامج MATLAB لحساب القيم الذاتية. وبعد ان أدخلت القيم التالية في البرنامج  $N=50, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 12$  و  $f=0.4$ ، و تم الحصول على مخطط في بعدين وهو الشكل (4)، والذي يمثل العلاقة البيانية بين التردد النسبي المعايير على المحور العمودي، بينما المتجه الموجي على المحور الأفقي، فهذا الشكل يظهر مخطط علاقة التشتت، (تركيبية النطاق الفوتوني)، والذي يتحرك خلال وسط متجانس، وهذا المخطط يشير على أنه لا وجود لأي ترددات ممنوعة بين النطاقات؛ نتيجة للتمائل الانتقالي المستمر.



الشكل (4) : تركيبة النطاق  
الفوتوني للوسط المتجانس  
 $a = 10, \epsilon_1 = \epsilon_2$



الشكل (5) : تركيبة النطاق  
الفوتوني لنمطين المستعرض  
الكهربيائي والمستعرض  
المغناطيسي لبؤرة فوتونية  
أحادية البعد  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{4}$

بتغيير قيم ثابت العزل، وذلك بإدخال القيم التالية في البرنامج  $N=50, \epsilon_1 = 3, \epsilon_2 = 12$  و  $f=0.4$ ؛ فتم الحصول على الشكل (5) بأن الفجوات والنطاقات تظهر بشكل متناوب على محور التردد. حيث إن هذا المخطط يعطي أول تسع فجوات، وعشرة نطاقات بالاستطاعة من خلال تركيبة النطاق الفوتونية معرفة، وتحديد الترددات الممنوعة و الترددات المسموحة. نلاحظ أن النمطين المستعرض الكهربيائي، و المستعرض المغناطيسي لهما تركيبة النطاق الفوتونية نفسها في بعد واحد.

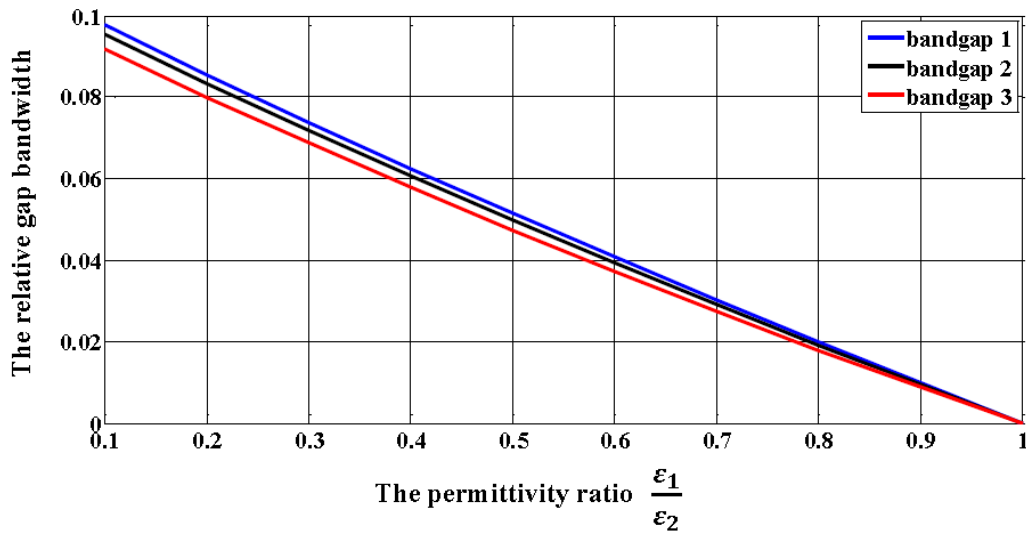
وبعد حساب القيم الذاتية ينبغي دراسة تأثير زيادة عدد الموجات المستوية على عرض الفجوة؛ ولأجل ذلك تم أخذ ستة من فجوات النطاق، لمعرفة تغير عرض كل فجوة مع زيادة عدد الموجات المستوية. بحيث يتم تحديد عرض كل فجوة نطاق من خلال الكمية  $\omega_m$  والتي تعرف بالعرض النسبي للفجوة حيث إن  $\omega_m = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$  وتعرف الكمية  $\Delta\omega$  على أنها الفرق بين ترددات النطاق العلوي، والنطاق السفلي لكل فجوة نطاق، بينما تدل الكمية  $\omega_m$  على متوسط الترددات للنطاقين العلوي والسفلي.

تأثير النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  على عرض الفجوة :

للنسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  تأثير على عرض الفجوة، فعندما تكون النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1$  فهذا يدل على أن الوسط الذي تنتشر فيه الموجات الكهرومغناطيسية هو وسط متجانس، وفي هذه الحالة لا تتولد فجوة تردد بين النطاقات، و هذا موضح في الشكل (4). في حالة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \approx 1$  تكون قريبة جداً من الواحد الصحيح، وهذا يدل على أن الوسط قريب من الوسط المتجانس، ويطلق عليه *nearly – homogeneous medium* (الوسط شبه المتجانس). فيتضح بأن هذه الحالة مثل الحالة المتجانسة باستثناء اختلاف واحد فقط، وهو تولد فجوة بين الترددات المسموحة في النطاقات العليا، والسفلى. وهذا يكشف على وجود نمط غير مسموح به في الأفلام الرقيقة أحادية البعد وهذا النمط

الممنوع له تردد ضمن تردد الفجوة المتولدة. أما إذا كانت النسبة أقل بكثير من الواحد  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ll 1$  يكون الوسط غير متجانس nonhomogeneous medium.

لدراسة تأثير النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  على عرض الفجوة النسبي  $\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$  تم اعتبار فجوات النطاق الثلاث الأولى في الشكل (5)، بحساب عرض فجوة النطاق النسبي تبين أن عرض كل فجوة يزداد؛ كلما قلت النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  عن الواحد الصحيح (الشكل (6) يبين هذه العلاقة). في هذا الشكل يتضح أنه كلما كانت  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ll 1$  يكون عرض الفجوة أقصى ما يمكن، وعندما تقترب هذه النسبة من الواحد الصحيح يقل عرض الفجوة إلى أن يصل الصفر  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1$ . و يظهر من الشكل أيضاً أن فجوة النطاق الأولى تكون دائماً أعرض من أي فجوة نطاق أخرى، وهذه النتيجة ثابتة مهما تغيرت قيمة النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  ولكن الذي يتأثر بهذه النسبة هو عرض كل فجوة نطاق على حدة [21].



الشكل (6): تأثير النسبة  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  على العرض النسبي للترددات الممنوعة.

#### الخلاصة

بعد تصميم ودراسة نموذج من الأفلام الرقيقة في بعد واحد، من خلال الحصول على علاقة التشتت لها، ومن ثم إجراء الحسابات لدراسة تغير وسلوك تلك الخطط [27][30][11] [5][2]. تعتبر خوارزمية تمديد الموجة المستوية [11] طريقة تقليدية في حساب علاقة التشتت، ولكن تستلزم زيادة كبيرة في عدد الموجات المستوية المستخدمة للحصول على أفضل استقرار للقيم الذاتية المتحصل عليها عند حل مسألة القيمة الذاتية، وبناء على ذلك نستنتج بأن هذه الطريقة ذات تقارب بطيء جداً للوصول إلى القيمة المستقرة.

#### المراجع

1. Almén, F. (2007). Band structure computations for dispersive photonic crystals. (MSc), Linköping University. available at: [www.liu.diva-portal.org](http://www.liu.diva-portal.org).
2. Busch, K. and John, S., (1997), "Photonic band gap formation in certain self-organizing systems", *Physical Review E*, Vol 58.
3. Chigrin, D.N. (2003). Electromagnetic waves propagation in photonic crystals with incomplete photonic band gap. Unpublished thesis (PhD), Bergischen University.
4. Guo, S. and Albin, S., (2003), "Simple plane wave implementation for photonic crystal calculations", *Optics Express*, Vol 11 No 2.
5. Hermann, D., Frank, M., Busch, K. and Wolfle, P. (2001), "Photonic band structure computations", *Optics Express*, Vol 8 No.3.
6. John, S., (1987), "Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Super lattice", *Physical Review Letters*, Vol 58.No.23.
7. Joannopoulos, J.D. *et al.* (2008). *Photonic Crystals Molding the Flow of Light*, 2<sup>nd</sup> edition, New Jersey: Princeton University Press.
8. Kittel, C. (2005). *Introduction to Solid State Physics*, 8<sup>th</sup> edition, USA: John Wiley & Sons.
9. Liu, W. and Yang, T., (2006), "Photonic band gaps in a two-dimensional photonic crystal with open veins", *Solid State Communications*, Vol 140, pp 144-148, available at: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
10. Lipson, R. and Lu, C., (2009), "Photonic crystals: a unique partnership between light and matter", *European Journal Of Physics*, Vol. 30, pp S33-S48.
11. Low, K.L., Jafri, M.Z. and Khan, S. (2009), "Band Gap Calculation Using the Plane Wave Expansion Method for Metallic Substrate Photonic Crystals (PC) with Air Rods in E Polarizing Mode", *Chinese Journal Of Physics*, Vol 47 No. 6.
12. Lourtioz, J.M. *et al.* (2005). *Photonic Crystals Towards Nanoscale Photonic Devices*, Heidelberg: Springer.
13. Pillai, S.O. (2002). *Solid State Physics*, 5<sup>th</sup> edition, New Delhi: New Age International.
14. Sakoda, K. (2005). *Optical Properties of Photonic Crystals*, 2<sup>nd</sup> edition: Springer
15. Sakoda, K. (1995), "Transmittance and Bragg reflectivity of two-dimensional photonic lattices", *PHYSICAL REVIEW B*, Vol 52. No.12.
16. Torkashvand, F., Darvish, G. and Darabi, E. (2011), "Improvement of absolute band gap properties in 2D photonic crystals consist of GaAs rods in air background", *Journal of Theoretical and Applied Physics*, Vol. 4-4, pp 25-28.
17. Wangsness, R. (1979). *Electromagnetic Fields*, USA: John Wiley & Sons.
18. Yablonovitch, Eli. (1987), "Inhibited Spontaneous Emission Solid- State Physics and Electronics", *Physical Review Letters*, Vol 58. No.20.
19. Yablonovitch, E. (1993), " Photonic band-gap structures", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol 10. No.2.

20. Zhang, Y., Ni, Z., Han, L., Zhang, Z. And Chen, H. (2011), "Study of improved plane wave expansion method on photonic crystal", *Optoelectronics And Advanced Materials – Rapid Communications*, Vol. 5No. 1, pp. 870-873.
21. Zhao, J., Li., X., Zhong, L. and Chen, G. (2009), "Calculation of photonic band-gap of one dimensional photonic Crystal", *Journal of Physics: Conference Series* 183, available at: <http://iopscience.iop.org/1742-6596/183/1/012018>.
22. Zdanowicz, M. R. (2008). *Numerical Analysis of Photonic Crystal Fibres*. Unpublished thesis (MSc), University of Nottingham.
23. Zhao, Y. (2006). *Study Of Photonic Crystal Structures By THz-TDS*. Unpublished thesis (PhD), Oklahoma State University.
24. A. Benmerkhi, M. Bouchemat, T. Bouchemat N N. Paraire, J. Mater. Sci. Eng. 15, 012094 (2012).
25. A. Harhouz, A. Hocini, J. *Electromagn. Wave Appl.*29, 659 (2015).
26. A. Hocini, D. Khedrouche, J. *Comput.Electron.* 6, 0559 (2014).
27. O. Bouleghlimat, A. Hocini, *Phys. Scr.* 89, 105502 (2014).
28. A. Hocini, A. Bouchelaghem, D. Saigaa, M. Bouras, T. Boumaza, M. Bouchemat, J. *Comput. Electron.*12, 50 (2013).
29. Islam, M.T.; Moctader, M.G.; Ahmed, K.; Chowdhury, S. *Benzene Shape Photonic Crystal Fiber Based Plasma Sensor: Design and Analysis*. *Photonic Sens.*(2018)