معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن كلية التربية

جامعة المرقب

العدد العشرون
يناير 2022م

هيئـــة تحريـر
مجلة التربوي

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
- المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
- كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
- يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
- البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3
معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

ضوابط النشر:

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.
2- The research articles or manuscripts should be original and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.
3- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.
4- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.
5- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention
1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.
2- The research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.
3- The published articles represent only the authors' viewpoints.

الأعداد الضبابية

سليمة محمد خضر
قسم الرياضيات / جامعة مصراتة – كلية التربية
s.khader@edu.misuratau.edu.ly

الملخص

هدف الورقة البحثية التعريف بالأعداد الضبابية. وهي تعميم لعدد حقيقي منتظم بمعنى أنه لا يشير إلى قيمة مفردة واحدة بل إلى مجموعة متصلة من القيم الممكنة, حيث يكون لكل قيمة ممكنة وزنها الخاص بين 0 و 1 . ولأن هذا النوع من الأعداد والذي يدرس في الرياضيات الضبابية مغيب عن مقرراتنا وأيضا لأنها ذات أهمية كبيرة في الأنظمة الضبابية, لذلك نهدف أولا إلى تقديم بعض المفاهيم الأساسية في الرياضيات الضبابية ومنها مفهوم المنطق الضبابي و مفهومي المجموعات العادية (الكلاسيكية) و المجموعات الضبابية. ثانيا, بينا المعايير الثلاثية ومكملاتها لما لها أهمية في جبر المجموعات الضبابية وأخيرا الوصول إلى مفهوم الأعداد الضبابية و أنواعها, وعرفنا العمليات الحسابية الأربع الخاصة بالأعداد الضبابية, أي ما يعرف بالحساب الضبابي .

الكلمات المفتاحية: المجموعات الضبابية, معايير ثلاثية ومكملاتها, الأعداد الضبابية .

المقدمة

نظرا لتطور العلوم في كافة مناحي الحياة نلاحظ أن التقييم – بصح أو خطأ – لا يكفي من أجل تمثيل أكثر المشكلات الحياتية وخاصة المشاكل التي تواجهنا. إن النمذجة التي تعتمد اعتمادا كليا على الظواهر الثنائية و هي وجود حالتين لكل ظاهرة إحدى الحالتين الصحيحة فيها تعطى رمز 1 والحالة الأخرى الخاطئة فيها تعطى رمز 0. وانطلاقا من هذا التقسيم نشأ المنطق الضبابي أو ما يعرف بالمنطق المشوش أو الغامض (العائم أو الترجيحي) على يد العالم الأذريبجاني الأصل (لطفي زادة) سنة 1965. الذي لا يعبر عنه بصح أو خطأ فقط بل يمكن أن يتناول صح جزئيا أو خطأ جزئيا, و بالتالي نتمكن من حل العديد من المشكلات التي تواجه الكثير من العلوم. حيث طرح زادة مفهوم المجموعة الضبابية وهي الأساس النظري للمنطق الضبابي والذي يعتبر امتداد للمنطق التقليدي أو الكلاسيكي كتعميم

للمجموعات العادية و هي تعطي وصفا أكثر دقة للظواهر الطبيعية بدلا من الوصف الذي تعطيه نظرية المجموعات العادية, و منذ ذلك الحين اتجه العلماء إلى تطبيق مفهوم المجموعات الضبابية في معظم فروع الرياضيات النظرية و التطبيقية امتد ذلك إلى جميع العلوم الأخرى مثل علوم الحاسبات و علوم الحياه و الاقتصاد و الجغرافية ... إلخ. وعلى هذه المجموعة ظهرت الأعداد الضبابية وهي مجموعة ضبابية خاصة جدا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تكمن أهمية الدراسة في الآتي:

- التزويد بالتعريفات والمفاهيم الأساسية في الرياضيات الضبابية.
- إبراز مفهوم أوسع للمنطق التقليدي وهو ما يسمى بالمنطق الضبابي.
- إلقاء الضوء على نوع آخر من الأعداد في الرياضيات وهو ما يسمى بالأعداد الضبابية.

إشكالية الدراسة:

لأن أقسام الرياضيات بجامعاتنا لم تفرد الحديث عن هذا النوع من الأعداد وهو ما يسمى بالأعداد الضبابية وأيضا لم تلق الضوء على الرياضيات الضبابية, فكانت الإشارة إلى ذكرها عرضا مبتورا في مادة ما, تجعل الباحث يصل إلى الأسس المبنية عليها, وعليه سنحاول الإجابة على بعض التساؤلات, منها:

1. ما مفهوم المنطق الضبابي؟ وعلى أي قيم يعتمد؟
2. ما هي المجموعات العادية (التقليدية أو الكلاسيكية) وما هي المجموعات الضبابية؟ وما الفرق بينهما؟
3. ما هي المعايير الثلاثية ومكملاتها؟ وما أهميتها في جبر المجموعات الضبابية؟
4. ما هو مفهوم الأعداد الضبابية؟ وما هي أنواعها؟ وما هي أهم العمليات الخاصة بها؟

هيكل البحث:

جعلت هذه الورقة البحثية تحت عنوان: "الأعداد الضبابية", وعليه فقد تألف البحث من مقدمة, وخمس بنود:

1. مفاهيم أساسية في الرياضيات الضبابية

(Basic Concepts of Fuzzy Mathematics)

المنطق الضبابي (Fuzzy Logic):

المنطق الضبابي هو مفهوم أوسع للمنطق التقليدي أو الكلاسيكي ثنائي القيم الذي يعتمد على القيمتين (0 و 1). و هو ليس منطقا ضبابيا, و إنما منطق يستخدم في وصف الضبابية, فالمنطق الضبابي هو نظرية المجموعات الضبابية, و المجموعات التي تعاير الغموض. و يبنى المنطق الضبابي على فكرة أن كل الأشياء تعترف بالدرجات. أي يرتكز المنطق الضبابي على التعابير والألفاظ اللغوية غير الدقيقة أو غير الواضحة أو غير المحددة و التي لا يمكن للمنطق التقليدي أن يعالجها مثل طويل, قصير, حار, بارد وهي قيم غير محددة تماما في المنطق الكلاسيكي الذي يعتمد على المتغيرات العددية. لذلك يستخدم المنطق الضبابي كطريقة أفضل لمعالجة البيانات.

مثال: لتكن X مجموعة أشخاص. و لتكن A مجموعة أطفال جزئية من X.
الشخص الذي عمره 3 سنوات ينتمي لمجموعة الأطفال بنسبة (0,8) و شخص في سن 10 سنوات درجة انتمائه (0,4) أما الذي عمره 13 سنة درجة انتمائه (0,1).

المجموعات العادية (التقليدية أو الكلاسيكية) (Ordinary sets):

في المجموعات العادية يمكن لعنصر ما إما أن ينتمي للمجموعة وإما أنه لا ينتمي لها بتاتا.
فلنعتبر مثلا X مجموعة شاملة و A مجموعة جزئية منها. إذا قمنا بتعريف الدالة μ_A التي تعطي لكل عنصر $x \in X$ درجة انتمائه للمجموعة A.

إذا كانت $$\mu_A(x) = 1 \Longrightarrow x \in A$$

إذا كانت $$\mu_A(x) = 0 \Longrightarrow x \notin A$$

أي أن الدالة $$\mu_A: X \to \{0, 1\}$$

المجموعات الضبابية (Fuzzy Sets):

المجموعة الضبابية هي مجموعة عناصرها مكونة من مركبتين. المركبة الأولى تمثل العنصر والثانية هي درجة انتماء هذا العنصر للمجموعة الجزئية. وهي العنصر الأهم وحجر الزاوية

في الرياضيات الضبابية و المكون الجديد الذي أضيف للعناصر والمجموعات التقليدية والتي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم الاستقلالية. و يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود انتماء تام لعنصر في مجموعة فقط بل هناك انتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة. في المجموعات الضبابية نجد أن العنصر x إما ينتمي أو لا ينتمي للمجموعة A وقد ينتمي (أو لا ينتمي) بدرجة معينة.

لتكن X مجموعة غير خالية. يقال أن A بأنها مجموعة ضبابية في X (أو يقال أن A مجموعة جزئية ضبابية من X) إذا كانت A دالة من X إلى $[0 ,1]$.

حيث أن لكل عنصر $x \in X$ قيمة عددية تكون بين 0 و 1 تمثل درجة انتماء العنصر X للمجموعة A و كلما كانت درجة العضوية أكبر كان العنصر أكثر انتماء للمجموعة A.

يمكن أن تعين درجة عضوية عنصر لمجموعة بواسطة دالة الانتماء μ_A

$$\mu_A: X \Rightarrow [0,1]$$

التي تربط كل عنصر $x \in X$ بالعدد الحقيقي $\mu_A(x)$. و تكتب المجموعات الضبابية بشكل مجموعة ثنائيات (المركبة الأولى هي العنصر و الثانية هي درجة الانتماء)

$$A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}.$$

و يمكن أن تتعين بكسور حيث البسط يمثل درجة الانتماء و المقام هو العنصر أي بالعبارة :

$$A = \{\frac{\mu_A(x)}{A}: x \in X\}$$

أي عندما يأخذ العنصر درجة انتماء (1) فهذا يعني أن العنصر ينتمي بالتمام إلى المجموعة الضبابية, و عندما تكون درجة الانتماء (صفر) فهذا يعني أن العنصر لا ينتمي إطلاقا إلى المجموعة الضبابية, و الدرجات الأخرى تتفاوت بين الصفر و الواحد, فعندما تكون درجة الانتماء (0.5) فهذا يعني أن العنصر ينتمي بنسبة (0.5) إلى المجموعة الضبابية و لا ينتمي إلى المجموعة بالنسبة نفسها و يدعى هذا العنصر بنقطة التوازن (Equilibrium point) و قد تكون نقطة واحدة أو عدة نقاط. و عندما تكون درجة الانتماء (0.9) فهذا يعني أن العنصر ينتمي إلى المجموعة الضبابية بنسبة (0.9) و لا ينتمي إليها بنسبة (0.1) و هو أقرب إلى الانتماء من عدمه.

أمثلة: لتكن X مجموعة معرفة بالشكل : $X = \{a, b, c\}$

(1) الدالة $\mu_A: X \to [0,1]$ المعرفة كالتالي :

$$\mu_A(a) = 0.5, \qquad \mu_A(b) = 0.25, \qquad \mu_A(c) = 0.2$$

تسمى المجموعة $A = \{(a, 0.5), (b, 0.25), (c, 0.2)\}$

مجموعة ضبابية في X حيث كل عنصر مرفق بدرجة إنتماء و يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = \{\frac{0.5}{a}, \quad \frac{0.25}{b}, \quad \frac{0.2}{c}\}$$

(2) الدالة $\mu_B: X \to [0,3]$ المعرفة كالتالي:

$$\mu_B(a) = 0.15, \qquad \mu_B(b) = 2.5, \qquad \mu_B(c) = 2$$

إن المجموعة B المعرفة بالشكل $B = \{(a, 0.15), (b, 2.5), (c, 2)\}$

لا تمثل مجموعة ضبابية في X.

ملاحظة: إذا أردنا معرفة الفرق بين المجموعات الضبابية و المجموعات العادية, نلاحظ إذا كانت A مجموعة عادية, فإن درجة الانتماء تأخذ فقط قيمتين هما 1, 0, أي أن

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

و عليه $\mu_A(x) = \{0, 1\}$. بينما إذا كانت A مجموعة ضبابية في المجموعة X. فإن $0 \le \mu_A(x) \le 1$ لكل $x \in X$, و علية المجموعة العادية تصبح حالة خاصة للمجموعات الضبابية.

أنواع المجموعات الضبابية (Types of Fuzzy Sets):

لتكن X مجموعة غير خالية. و لتكن $A : X \to [0,1]$ مجموعة ضبابية في المجموعة X.

(1) الصيغة $\mu_A(x) = 0$ لكل $x \in X$. تسمى مجموعة ضبابية خالية (Empty Fuzzy Set) و يرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو O.

(2) الصيغة $\mu_A(x) = 1$ لكل $x \in X$. تسمى مجموعة ضبابية شاملة (Universal Fuzzy Set) و يرمز لها بالرمز X أو 1.

و يقال عن المجموعة الضبابية $A : X \to [0,1]$ بأنها غير خالية إذا وجد على الأقل $x \in X$ بحيث أن $\mu_A(x) \neq 0$.

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3
معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

(3) المجموعات الضبابية المبعثرة, وهي المجموعة الضبابية المتقطعة والتي دالة الانتماء لها متقطعة.

فمثلا: لتكن $X = \{a, b, c\}$ مجموعة منتهية (وقد تكون غير منتهية), $\mu_A : X \to I$ فإن $A = \{\frac{0.3}{a}, \frac{1}{b}, \frac{0.6}{c}\}$ مجموعة ضبابية مبعثرة .

(4) المجموعات الضبابية المستمرة, وهي المجموعات التي دالة الانتماء لها مستمرة أي $\mu_A : X \to I$ تكون مستمرة.

مثلا الدالة $\mu_A : \mathbb{R} \to I$ المعرفة كما يلي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.25x \quad , \quad 0 \le x \le 4 \\ 0.25(8 - x) \quad , \quad 4 \le x \le 8 \\ 0 \quad , \quad x \notin [0, 8] \end{cases}$$

تعريفات :

لتكن X مجموعة غير خالية. و لتكن $A : X \to [0, 1]$ مجموعة ضبابية في المجموعة X.

(1) ارتكاز أو إسناد (Support) المجموعة الضبابية A يرمز له بالرمز A^* أو $sp(A)$ و يعرف بالصيغة

$$A^* = sp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

(2) يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطة تحويل (Crossover Point) للمجموعة الضبابية A إذا كانت $\mu_A(x) = 0.5$

(3) يقال عن A بأنها سوية (Normal) إذا وجد $x_0 \in X$ بحيث أن $\mu_A(x_0) = 1$ أي أن

$$\{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \neq \emptyset$$

(4) ارتفاع أو قمة (Height) المجموعة الضبابية A يرمز له بالرمز $ht(A)$ و يعرف بالصيغة

$$ht(A) = sup\{\mu_A(x) : x \in X\}$$

و بصورة خاصة إذا كانت A سوية فإن $ht(A) = 1$.

و كذلك يقال عن A بأنها منتهية (Finite) إذا كانت A^* مجموعة منتهية و بخلاف ذلك يقال عن A بأنها غير منتهية (Infinite).

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

مثال: لتكن $X=\{a,b,c\}$ و لتكن A مجموعة ضبابية في X معرفة كالأتي:

$$\mu_A(a)=0.5, \qquad \mu_A(b)=0.33, \qquad \mu_A(c)=0$$

فإن

$$A^* = sp(A) = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\} = \{a,b\}$$

و النقطة a تمثل نقطة تحويل للمجموعة الضبابية A لأن $\mu_A(a)=0.5$ و أن A غير سوية , لأنه لا يوجد عنصر صورته تساوي واحد, و كذلك

$$ht(A) = sup\{\mu_A(x) : \ x \in X\} = sup\{0.5, 0.33, 0\}$$

2. معايير ثلاثية و مكملاتها (Triangular Norms and Conorms):

إن الدوال التي تستخدم لتقاطع المجموعات الضبابية تسمى معايير ثلاثية و الدوال التي تستخدم لاتحاد المجموعات الضبابية تسمى معايير مكملة ثلاثية.

أولا (المعايير الثلاثية)

تعريف: لتكن T عملية ثنائية على المجموعة I , أي أن $T: I \times I \to I$ دالة. يقال عن T بأنها معيار ثلاثي على المجموعة I إذا تحققت الخواص الأتية:

(1) $T(a,1)=a$ لكل $a \in I$ (الشرط الحدودي).

(2) $T(a,b)=T(b,a)$ لكل $a,b \in I$ (الابدالية).

(3) إذا كان $b_1 \le b_2$ فإن $T(a,b_1) \le T(a,b_2)$ لكل $a \in I$ (الرتابة).

(4) $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ لكل $a,b,c \in I$ (التنسيقية).

مبرهنة : لتكن T معيار ثلاثي على المجموعة I .

(1) $T(1,1)=1$. (2) $T(0,1)=0$. (3) $T(1,0)=0$.

(4) $T(0,0)=0$. (5) $T(a,a) \le a$ لكل $a \in I$. (6) إذا كانت $a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$ فإن $T(a_1,b_1) \le T(a_2,b_2)$.

البرهان:

(1) , (2) مباشرة من التعريف السابق الخاصية (1).

(3) بما إن $T(1,0)=T(0,1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))

$\Leftarrow$ $T(1,0)=0$.

(4) بما أن $0 < 1 \quad \Leftarrow \quad T(0,0) \leq T(0,1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3))

$\Leftarrow \quad T(0,0) \leq 0$,ولكن $T(0,0) \geq 0 \quad \Leftarrow \quad T(0,0) = 0$.

(5) بما إن $a \leq 1 \quad \Leftarrow \quad T(a,a) \leq T(a,1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3))

ولكن $T(a,1) = a$ (حسب التعريف السابق الخاصية (1)) $\Leftarrow \quad T(a,a) \leq a$.

(6) بما أن $b_1 \leq b_2 \quad \Leftarrow \quad T(a_1,b_1) \leq T(a_2,b_2)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3)) .

ولكن $T(a_1,b_2) \leq T(b_2,a_1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))

$\Leftarrow \quad T(a_1,b_1) \leq T(b_2,a_1)$

بما إن $a_1 \leq a_2 \quad \Leftarrow \quad T(b_2,a_1) \leq T(b_2,a_2) \quad \Leftarrow \quad T(a_1,b_1) \leq T(b_2,a_2)$

ولكن $T(a_2,b_2) = T(b_2,a_2)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))

$\Leftarrow \quad T(a_1,b_1) \leq T(a_2,b_2)$.

تعريف النمط t : النمط هو أساس تكرار قيمة, إما بالشكل أو بالأرقام. أي هو ما يتكرر ويتغير بانتظام. والنمط t هنا هو قيمة معينة تنتمي إلي μ_A .

التعريفات الأربعة التالية تمثل التعريفات الأساسية للمعيار من النمط t .

تعريف: الدالة $T_m : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $T_m(a,b) = min\{a,b\}$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار ثلاثي و يسمى بالتقاطع القياسي (Standard Intersection).

تعريف: الدالة $T_b : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $T_b(a,b) = max\{0, a+b-1\}$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار ثلاثي و يسمى بالجمع المقيد (Bounded Sum) أو الاختلاف المقيد (Bounded Difference).

تعريف: الدالة $T_p : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $T_p(a,b) = ab$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار ثلاثي و يسمى بالضرب الجبري (Algebraic Product).

تعريف: الدالة $T^* : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة

$$T^*(a,b) = \begin{cases} a & , \quad b = 1 \\ b & , \quad a = 1 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

تكون معيار ثلاثي و يسمى التقاطع المصادم (Drastic Intersection).

مثال: برهن على أن $T^*(a,b) \leq T_b(a,b) \leq T_p(a,b) \leq T_m(a,b)$ لكل $a,b \in I$.

الحل: ليكن $a,b \in I$

$$T_b(a,b) = max\{0, a+b-1\}, T^*(a,b) = \begin{cases} a & , \quad b=1 \\ b & , \quad a=1 \\ 0 & , \quad o.\, w. \end{cases}$$

إذا كانت $b=1$ $\Leftarrow$ $T^*(a,b) = a$, $T_b(a,b) = max\ \{0,a\} = a,$

$\Leftarrow T^*(a,b) = T_b(a,b)$

إذا كانت $a=1$ $\Leftarrow$ $T^*(a,b) = b$, $T_b(a,b) = max\ \{0,b\} = b,$

$\Leftarrow T^*(a,b) = T_b(a,b)$

إذا كانت $a \neq 1, b \neq 1$ $\Leftarrow$ $T^*(a,b) = 0$, $T_b(a,b) \geq 0,$

$\Leftarrow T^*(a,b) \leq T_b(a,b)$

و بالمثل نبرهن الأجزاء الأخرى.

ثانيا (مكملات المعايير الثلاثية)

تعريف : لتكن C عملية ثنائية على المجموعة I , أي أن $C : I \times I \to I$ دالة. يقال عن C بأنها معيارمكمل ثلاثي على المجموعة I إذا تحققت الخواص الأتية:

(1) $C(a,0) = a$ لكل $a \in I$ (الشرط الحدودي).

(2) $C(a,b) = C(b,a)$ لكل $a,b \in I$ (الابدالية).

(3) إذا كان $b_1 \leq b_2$ فإن $C(a,b_1) \leq C(a,b_2)$ لكل $a \in I$ (الرتابة).

(4) $C(a,C(b,c)) = C(C(a,b),c)$ لكل $a,b,c \in I$ (التنسيقية).

مبرهنة : ليكن C معيار مكمل ثلاثي على المجموعة I.

(1) $C(0,0) = 0$. (2) $C(1,0) = 1$. (3) $C(0,1) = 1$.

(4) $C(1,1) = 1$. (5) $C(a,a) \geq a$ لكل $a \in I$. (6) إذا كانت $b_1 \leq b_2, a_1 \leq a_2$ فإن $C(a_1,b_1) \leq C(a_2,b_2)$.

البرهان:

(1) , (2) مباشرة من التعريف السابق الخاصية (1).

(3) بما إن $C(0,1) = C(1,0)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))
$\Leftarrow$ $C(0,1) = 1$.

(4) بما أن $0 < 1$ $\Leftarrow$ $C(1,0) \leq C(1,1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3))
$\Leftarrow$ $C(1,1) \geq 1$ ولكن, $C(1,1) \leq 1$ $\Leftarrow$ $C(1,1) = 1$.

(5) بما إن $a \geq 0$ $\Leftarrow$ $C(a,a) \geq C(a,0)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3))
ولكن $C(a,0) = a$ (حسب التعريف السابق الخاصية (1)) $\Leftarrow$ $C(a,a) \geq a$.

(6) بما أن $b_1 \leq b_2$ $\Leftarrow$ $C(a_1,b_1) \leq C(a_2,b_2)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (3)) .
ولكن $C(a_1,b_2) = C(b_2,a_1)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))
$\Leftarrow$ $C(a_1,b_1) \leq C(b_2,a_1)$
بما إن $a_1 \leq a_2$ $\Leftarrow$ $C(b_2,a_1) \leq C(b_2,a_2)$ $\Leftarrow$ $C(a_1,b_1) \leq C(b_2,a_2)$
ولكن $C(a_2,b_2) = C(b_2,a_2)$ (حسب التعريف السابق الخاصية (2))
$\Leftarrow$ $C(a_1,b_1) \leq C(a_2,b_2)$.

التعريفات الأربعة التالية تمثل التعريفات الأساسية للمعيار المكمل من النمط t .

تعريف : الدالة $C_m : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $C_m(a,b) = max\{a,b\}$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار مكمل ثلاثي و يسمى بالاتحاد القياسي (Standard Union).

تعريف : الدالة $C_b : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $C_b(a,b) = min\{1, a+b\}$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار مكمل ثلاثي و يسمى بالجمع المقيد (Bounded Sum).

تعريف: الدالة $C_p : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة $C_P(a,b) = a + b - ab$ لكل $a,b \in I$. تكون معيار مكمل ثلاثي و يسمى بالضرب الجبري (Algebraic Sum).

تعريف: الدالة $C^* : I \times I \to I$ المعرفة بالصيغة

$$C^*(a,b) = \begin{cases} a & , \quad b = 0 \\ b & , \quad a = 0 \\ 1 & , \quad o.\, w. \end{cases}$$

تكون معيار مكمل ثلاثي و يسمى الاتحاد المصادم (Drastic Union).

مثال: برهن على أن $C_m(a,b) \le C_P(a,b) \le C_b(a,b) \le C^*(a,b)$ لكل $a,b \in I$.

الحل: ليكن $a,b \in I$

$$T_b(a,b) = max\{0, a+b-1\}, C^*(a,b) = \begin{cases} a & , & b=0 \\ b & , & a=0 \\ 1 & , & o.\ w. \end{cases}$$

إذا كانت $b = 0 \;\Leftarrow\; C^*(a,b) = a \quad C_b(a,b) = min\{1,a\} = a,$

$\Leftarrow \; C^*(a,b) = C_b(a,b)$

إذا كانت $a = 0 \;\Leftarrow\; C^*(a,b) = b \quad C_b(a,b) = min\{1,b\} = b,$

$\Leftarrow \; C^*(a,b) = C_b(a,b)$

إذا كانت $a \ne 0, b \ne 0 \;\Leftarrow\; C^*(a,b) = 1 \quad C_b(a,b) \le 1,$

$\Leftarrow \; C_b(a,b) \le C^*(a,b)$

و بالمثل نبرهن الأجزاء الأخرى.

3. جبر المجموعات الضبابية (Fuzzy Sets Algebra):

تعريف: لتكن كل من A, B مجموعة ضبابية في المجموعة X.

(1) اتحاد المجموعتين A, B يرمز له بالرمز $A \cup B$ ويعرف بالصيغة $(A \cup B)(x) = C_m(\mu_A(x), \mu_B(x)) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ لكل $x \in X$.

(2) تقاطع المجموعتين A, B يرمز له بالرمز $A \cap B$ و يعرف بالصيغة $(A \cap B)(x) = T_m(\mu_A(x), \mu_B(x)) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ لكل $x \in X$.

مبرهنة: لتكن كل من A, B مجموعة ضبابية في المجموعة X.

(1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ وكذلك $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

(2) $A \cup B = B$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ وكذلك $A \cap B = A$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$.

(3) $A \cup \emptyset = A$, $A \cup X = X$, $A \cup A = A$ وكذلك $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap X = A$.

(4) $A \cup B = B \cup A$ وكذلك $A \cap B = B \cap A$.

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ وكذلك $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

مثال: ليكن $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ و لتكن

$$A = \{\frac{0.2}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.8}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{0.7}{x_5}, \frac{0.3}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9}\}$$
$$B = \{\frac{0}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{0.2}{x_3}, \frac{0.4}{x_4}, \frac{0.6}{x_5}, \frac{0.8}{x_6}, \frac{1}{x_7}, \frac{1}{x_8}, \frac{1}{x_9}\}$$

أوجد: $A \cup B,\ A \cap B$.

الحل:

$$A \cap B = \{\frac{0}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{0.2}{x_3}, \frac{0.4}{x_4}, \frac{0.6}{x_5}, \frac{0.3}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9}\}$$
$$A \cup B = \{\frac{0.2}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.8}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{0.7}{x_5}, \frac{0.8}{x_6}, \frac{1}{x_7}, \frac{1}{x_8}, \frac{1}{x_9}\}$$

تعريف: لتكن كل من A, B مجموعة ضبابية في X .

(1) الفرق بين المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A - B$ ويعرف بالصيغة $(A - B)(x) = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$ لكل $x \in X$.

(2) مكملة (متممة) المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة X هي $X - A$ ويرمز لها بالرمز A^c , و عليه

$A^c(x) = min\{\mu_X(x), 1 - \mu_A(x)\} = min\{1, 1 - \mu_A(x)\} = 1 - \mu_A(x)$ لكل $x \in X$.

(3) الفرق التناظري بين المجموعتين A, B يرمز له بالرمز $A \vartriangle B$ ويعرف بالشكل $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

مثال: ليكن $X = \{1,5,8\}$ ولتكن كل من A, B مجموعة ضبابية في X . حيث أن

$$\mu_A(1) = 0, \quad \mu_A(5) = 0.3, \quad \mu_A(8) = 0.6,$$
$$\mu_B(1) = 0.2, \quad \mu_B(5) = 0, \quad \mu_B(8) = 0.5$$

فإن:

$$(A - B)(1) = min\{\mu_A(1), 1 - \mu_B(1)\} = min\{0, 0.8\} = 0,$$
$$(A - B)(5) = min\{\mu_A(5), 1 - \mu_B(5)\} = min\{0.3, 1\} = 0.3,$$

$(A-B)(8)=min\{\mu_A(8),1-\mu_B(8)\}=min\{0.6,0.5\}=0.5,$
$(B-A)(1)=min\{\mu_B(1),1-\mu_A(1)\}=min\{0.2,1\}=0.2,$
$(B-A)(5)=min\{\mu_B(5),1-\mu_A(5)\}=min\{0,0.7\}=0,$
$(B-A)(8)=min\{\mu_B(8),1-\mu_A(8)\}=min\{0.5,0.4\}=0.4,$
$\mu_{A^c}(1)=1-\mu_A(1)=1-0=1,$
$\mu_{A^c}(5)=1-\mu_A(5)=1-0.3=0.7,$
$\mu_{A^c}(8)=1-\mu_A(8)=1-0.6=0.4,$
$\mu_{B^c}(1)=1-\mu_B(1)=1-0.2=0.8,$
$\mu_{B^c}(5)=1-\mu_B(5)=1-0=1,$
$\mu_{B^c}(8)=1-\mu_B(8)=1-0.5=0.5$
$\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x)$

مبرهنة: ليكن كل من A,B,C مجموعات ضبابية في X .

(1) $A-B=A\cap B^c$ (2) $X^c=\emptyset$ وكذلك $\emptyset^c=X$ (3) $(A^c)^c=A$

(4) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ وكذلك $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

(5) إذا كانت $A\subseteq B$ فإن $B^c\subseteq A^c$

البرهان:

(1) ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$

$$(A-B)(x)=min\big(A(x),1-B(x)\big)=min\big(A(x),B^c(x)\big)$$
$$=(A\cap B^c)(x)$$

(2) ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$ $X^c(x)=1-X(x)=1-1=0=\emptyset(x)$

وكذلك $\emptyset^c(x)=1-\emptyset(x)=1-0=1=X(x)$

(3) ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$

$$(A^c)^c(x)=1-A^c(x)=1-(1-A(x))=A(x)$$

(4) ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$

$$(A\cup B)^c(x)=1-(A\cup B)(x)=1-max\{A(x),B(x)\}$$
$$=1-\{1-min\{1-A(x),1-B(x)\}$$
$$=min\{A^c(x),B^c(x)\}=(A^c\cap B^c)(x)$$

وبالمثل نبرهن $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

(5) ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$

بما أن $A \subseteq B \quad \Leftarrow$

$$A(x) \leq B(x) \quad \Rightarrow \quad -B(x) \leq -A(x) \quad \Rightarrow \quad 1 - B(x) \leq 1 - A(x)$$
$$\Rightarrow \quad B^c(x) \leq A^c(x)$$

ملاحظة: إذا كانت A مجموعة ضبابية في X . فإن $A \cup A^c \neq X$, $A \cap A^c \neq \emptyset$ لأن

$$(A \cup A^c)(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} \geq \frac{1}{2}$$
$$(A \cap A^c)(x) = min\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} \leq \frac{1}{2}$$

مثلا: لتكن $X = \{a, b, c\}$ و لتكن $A = \{\frac{0.25}{a}, \frac{0.3}{b}, \frac{0.5}{c}\}$ فإن

$$A^c = \{\frac{0.75}{a}, \frac{0.7}{b}, \frac{0.5}{c}\}$$
$$A \cup A^c = \{\frac{0.75}{a}, \frac{0.7}{b}, \frac{0.5}{c}\}$$
$$A \cap A^c = \{\frac{0.25}{a}, \frac{0.3}{b}, \frac{0.5}{c}\}$$

4. الأعداد الضبابية (Fuzzy Numbers):

الأعداد الضبابية مجموعات ضبابية خاصة جدا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أي أن العدد الضبابي هو تعميم لعدد حقيقي منتظم بمعنى أنه لا يشير إلى قيمة مفردة واحدة بل إلى مجموعة متصلة من القيم الممكنة , حيث يكون لكل قيمة ممكنة وزنها الخاص بين 0 و 1. و إنها ذات أهمية كبيرة في الأنظمة الضبابية. و لها خصائص تجعلها مناسبة جدا للنمدجه و تصميم أنواع معينة من النشاطات. هنا سوف نعطي التعريف العام للعدد الضبابي مع الأمثلة .

تعريف : لتكن A مجموعة ضبابية في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال عن A بأنها عدد ضبابي إذا تحققت الشروط الآتية :

(1) أن تكون المجموعة الضبابية A سوية , بعبارة أخرى يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\mu_A(x_0) = 1$.

(2) أن تكون المجموعة الضبابية A محدبة , بعبارة أخرى

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

(3) أن تكون المجموعة الضبابية A شبة مستمرة من الأعلى , بعبارة أخرى المجموعة

$\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \leq \lambda\}$ تكون مغلقة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.

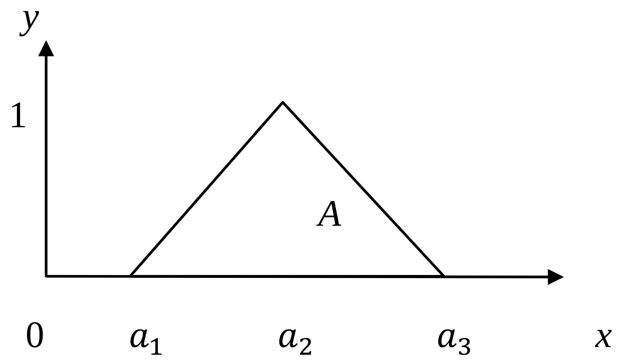
(4) المجموعة $\mu_A(x)$ تكون محددة ضمن الفترة $[0,1]$.

بذلك $\mu_A(x) = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \mu_A(x)\} \in [0,1]$

أنواع الأعداد الضبابية :

(1) الأعداد الضبابية الثلاثية(Triangular Fuzzy Numbers)

يقال عن العدد الضبابي A بأنه مثلثي (ثلاثي القيم) إذا كان A يعرف بثلاثة أعداد $a_1 < a_2 < a_3$ حيث رأس المثلث يكون عند النقطة $x = a_2$ و قاعدته تكون الفترة المغلقة $[a_1, a_3]$ و يكتب $A = (a_1, a_2, a_3)$ لكل عدد ثلاثي A ينتمي إلى دالة الإنتماء $\mu_A(x)$ ممثل بشكل بياني في الشكل



عندما تكون دالة الانتماء $\mu_A(x)$ بالشكل التالي

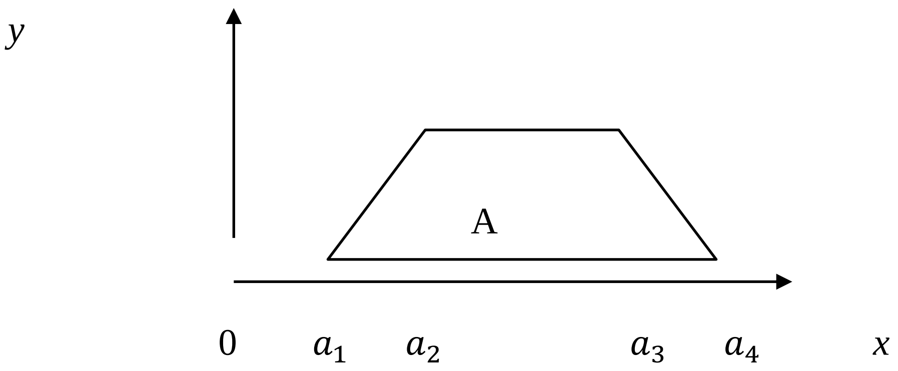
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & for \quad x \leq a_1 \\ \dfrac{(x - a_1)}{a_2 - a_1} & for \quad a_1 < x < a_2 \\ 1 & for \quad x = a_2 \\ \dfrac{(a_3 - x)}{a_3 - a_2} & for \quad a_2 < x < a_3 \\ 0 & for \quad x \geq a_3 \end{cases}$$

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3
معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

(2) الأعداد الضبابية الرباعية(ذات شكل شبه المنحرف):

(Trapezoidal Fuzzy Numbers)

يقال عن العدد الضبابي A بأنه شبه منحرف (رباعي القيم) إذا كان A يعرف بأربع أعداد $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ بحيث $\mu_A(x) = 1$ على الفترة المغلقة $[a_2, a_3]$ و قاعدته تكون الفترة المغلقة $[a_1, a_4]$ و يكتب $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ لكل عدد رباعي A ينتمي إلى دالة الإنتماء $\mu_A(x)$ ممثل بشكل بياني في الشكل



عندما تكون دالة الانتماء $\mu_A(x)$ بالشكل التالي

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & for \quad x \le a_1 \\ \dfrac{(x - a_1)}{a_2 - a_1} & for \quad a_1 < x < a_2 \\ 1 & for \quad a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{(a_4 - x)}{a_4 - a_3} & for \quad a_3 < x < a_4 \\ 0 & for \quad x \ge a_4 \end{cases}$$

5. الحساب الضبابي (Fuzzy Arithmetic):

العمليات الخاصة بالأعداد الضبابية الثلاثية:

(Operation of Triangular Fuzzy Numbers)

لتكن لدينا مجموعتين من الأعداد الضبابية A, B و موصوفة $(a_1, a_2, a_3),\ (b_1, b_2, b_3)$ على التوالي, بذلك يمكن اجراء العمليات الحسابية (الجمع و الطرح و الضرب و القسمة) كالأتي:

$$(A + B) = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (\ a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$(A - B) = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (\ a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$$
$$(A \times B) = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$$
$$= (min(\ a_1b_1, a_1b_3, a_3b_1, a_3b_3), a_2b_2, max(a_1b_1, a_1b_3, a_3b_1, a_3b_3))$$
$$(A \div B) = (a_1, a_2, a_3) \div (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) \times \left(\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right):\ 0 \notin B$$

العمليات الخاصة بالأعداد الضبابية الرباعية:

(Operation of Trapezoidal Fuzzy Numbers)

لتكن لدينا مجموعتين من الأعداد الضبابية A, B و موصوفة $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4)$ على التوالي, بذلك يمكن اجراء العمليات الحسابية (الجمع و الطرح و الضرب و القسمة) و ما يترتب عليها من اجراءات كالأتي:

$$(A + B) = (a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4)$$
$$= (\ a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4\ + b_4)$$
$$(A - B) = (a_1, a_2, a_3, a_4) - (b_1, b_2, b_3, b_4)$$
$$= (\ a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$$
$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = (\mathrm{m}', \mathrm{n}', \alpha', \beta')$$

حيث أن

$$m' = min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$$
$$n' = max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$$
$$\alpha' = m' - min((a_1 - a_3)(b_1 - b_3), (a_1 - a_3)(b_2 + b_4),$$
$$(a_2 + a_3)(b_1 - b_3), (a_2 + a_4)(b_2 + b_4))$$
$$(A \div B) = (a_1, a_2, a_3, a_4) \div (b_1, b_2, b_3, b_4)$$
$$= (a_1, a_2, a_3, a_4) \times \left(\frac{1}{b_4}, \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right):\quad 0 \notin B$$

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

مثال: إذا كان $B = (1,2,3)$, $A = (0,1,3)$ أوجد: $A + B, A - B, A \times B, A \div B$.

الحل:

$A + B = (1,3,5), \quad A - B = (-3,-1,1), \quad A \times B = (0,2,6), \quad A \div B = (0,0.5,2)$

بعض خصائص الأعداد الضبابية(Some of the Cheristics of Fuzzy Numbers):

(1) تسمى الأعداد الضبابية $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ رباعية غير سالبية إذا كان $a_1 - a_3 \geq 0$.

(2) إذا كانت $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ عندئذ يطلق عليها بالأعداد الضبابية الصفرية.

(3) إذا كان لدينا مجموعتين $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ من الأعداد الضبابية يقال عنها متساويتين $A = B$ إذا كانت $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4$.

الخاتمة:

مما سبق قوله تبين لنا أهمية هذه الورقة, والجهد المبذول فيها, وقد كانت هذه الورقة تتكلم عن (الأعداد الضبابية) , وقد بذلت كل الجهد والبذل لكي تخرج في هذا الشكل. وتكمن أهمية هذه الدراسة في إلمام الباحث بهذا النوع من الأعداد المغيب عن مقرراتنا , وأرجوا من الله أن تكون رحله ممتعة وشيقة, وكذلك أرجوا أن تكون قد ارتقت بدرجات العقل والفكر, وأن تصل الفائدة المرجوة منها. وبهذه الورقة أترك الباب مفتوح لكل البحاث لأن يقدموا ما لديهم من أفكار جديدة , لكي نعمل على تطوير البحث العلمي وخصوصا في مجال الرياضيات بكل فروعها.

المراجع

1) كيحل. (2019). لمحة عن الرياضيات الضبابية. العراق.

2) المياحي, الركابي. (2012). مقدمة في الرياضيات الضبابية. الطبعة الأولى. العراق.

3) Mordeson, J. N. & Malik, D. S. (1998). Fuzzy Commutative Algebra. *World Scientific.*

4) Kerre, E. E. & Mordeson, J. N. (2005). A historical Overview of Fuzzy Mathematics, *New Mathematics and Natural Computation*, 1, 1-26.

5) Buckley, J. J. & Eslami, E. (2002). An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets. New York.

6) Klir, G. J. & Yuan, B. (1997). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Theory and Applications*. New Delhi.

7) Haeringen, H. (1983). Fuzzy Numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 92(2): 301-341.

مجـلة الـتربـوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

معامل التأثير العربي 1.5
العدد 20

الفهـــــــــرس

	مجلـة الــتربــوي Journal of Educational ISSN: 2011- 421X Arcif Q3	معامل التأثير العربي 1.5 العدد 20